

軽金属形材の座屈に関する研究

矢口 統堂*・飯塚敬一郎**・小林 健司**・藤野 和昭**

Studies on the buckling of light metal shapes

By Shizuo Yaguchi*, Keiichiro Iizuka**, Kenji Kobayashi** and Kazuaki Fujino**

Synopsis: Concerning with mass-produced light metal shapes as various casing materials of machines and instruments, or construction materials, we are afraid that users do not execute sufficient check of their strength at the time of using them.

Then, aiming chiefly to offer users of these materials some data which they can apply easily to investigate strength in elastic stability, we have carried our studies and experimentations.

In this 1st report, we took up Aluminium equal-angle and T-type shapes, and as to above mentioned data we have got 4 tables, Table 1~Table 4, also Fig. 9, Fig. 14 and Fig. 20. Still more, we showed the coefficient equation (i) in the paragraph 5, which users can convert these data when they use materials of another Young's modulus or another breadth or thickness.

要旨：機器類のいろいろなケーシングの材料や建築用材として市販される多量生産形の軽金属形材については、使用に際してユーザー側の強度吟味が必ずしも十分に行なわれているとは思われない。そこで筆者らは主としてユーザーに対し、容易に座屈強度を吟味できる資料を提供することを目標として実験研究を進めてきた。

この第一報においては、アルミニウムの等辺 L 形断面及び T 形断面の形材を取り上げ、上記のユーザーの使用に供する資料として筆者らは表 1 ないし表 4, ならびに図 9, 図 14, 及び図 20 の結果を得た。また、縦弾性係数あるいは、板の幅や厚さの異なる材料を使用する場合に上記の図・表を適用するための換算係数を第 5 節の式 (i) で示した。

1. ま え が き

最近、軽金属形材は航空機や電子機器類の枠組、あるいは建築用材などに多用され、益々複雑な断面形状をもつ、組み合わせ、または、押し出し形状が出廻っている。しかしその強度については、必ずしもユーザー側の吟味は十分に行なわれているとは思えない。殊にこれらの座屈に関する研究は、例えば中川忠らの「組合せ柱（鋼板製）の曲げねじり座屈」¹⁾に見られるようにほとんど特別な建築用材についての研究が多く、汎用性のあるものは見当たらない。

筆者らは市販される多量生産の軽金属形材に注目し、一般的な形材の座屈理論から出発して、ユーザーが強度

吟味をする際に適用できる資料となることを目標として実験研究を進めた。この第一報においては、アルミニウムの L 形断面及び T 形断面の形材について、それぞれ超越方程式を導き、図式解法によって座屈応力を求め、また、精度を高めるためにニュートン・ラプソン法を採用した。

一方、板の幅 b を一定とし、長さ a を変えて a/b 比の異なる試験片について、コンピュータ計測制御式の万能試験機により座屈試験を行ない、ひずみゲージによる各半波ごとの動的なひずみ挙動の観察及び測定を実施して、理論との対比分析を行なった。

2. 板の座屈の基礎

(1) 薄板が荷重を受けて板面がたわむとき、板の中央面内に直角座標の x 軸と y 軸をとり、 z 軸は垂直方向にとって下向きを正とする。[図 1 (a)]。任意の座標 (ξ, η) の点 A に六面体要素を求める。図 1 (b)はこれを拡大

*工学部機械工学科 教授

Dept. of Mechanical Engineering, Professor

**工学部機械工学科 卒業生

Dept. of Mechanical Engineering, Graduate

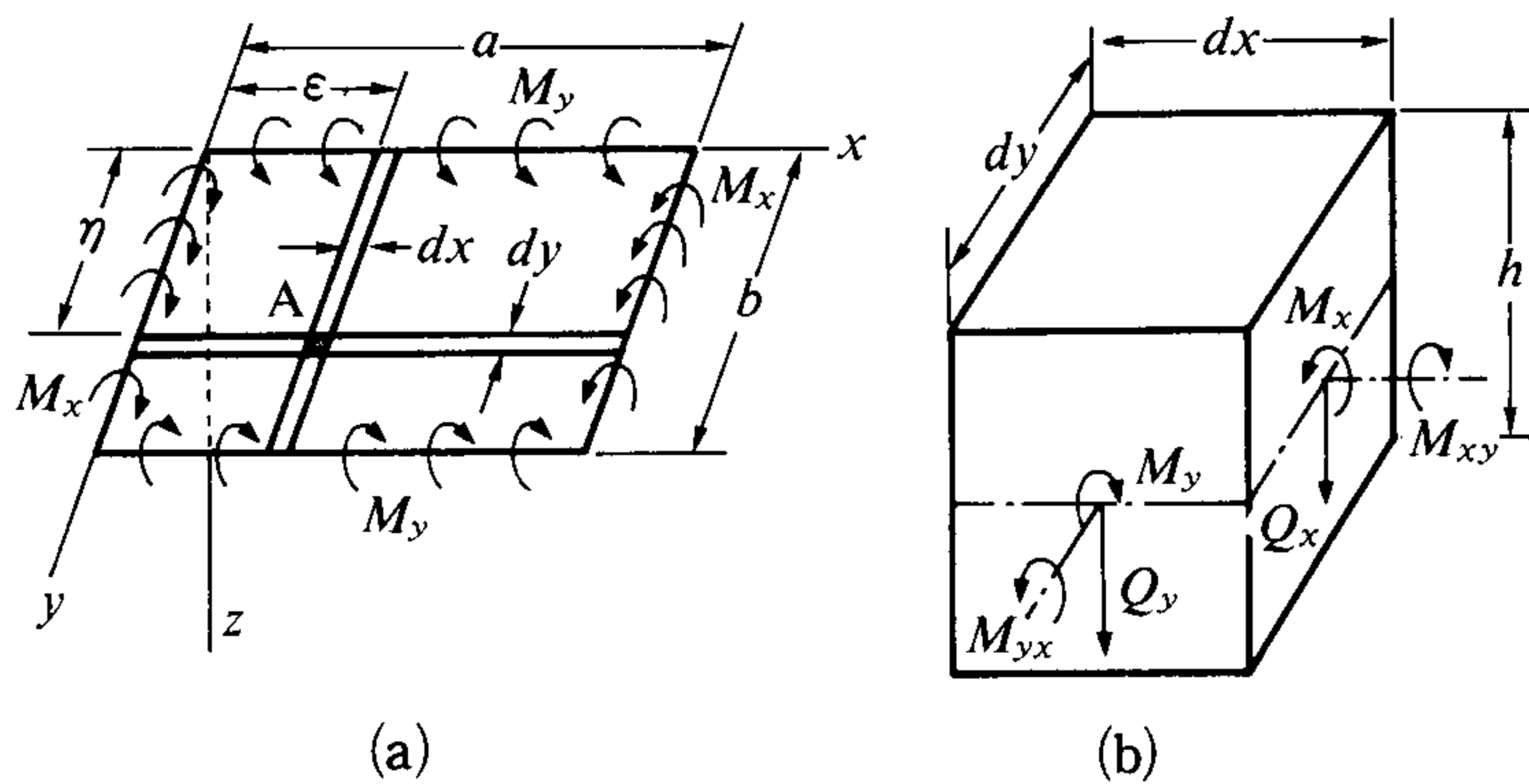


図1 薄板の曲げ

したものである。要素の側面に生じているせん断力、曲げモーメント及びねじりモーメントは、 z 方向の変位 w に関して次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \text{せん断力: } Q_x &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \\ Q_y &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{曲げモーメント: } M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} \text{ねじりモーメント: } M_{xy} &= -M_{yx} \\ &= D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (c)$$

ここに D は板の曲げ剛性である。

(2) 図1の板の側面 (x 面あるいは y 面) に中央面内の圧縮荷重が作用し、板が座屈を起す場合を考える。板は x 方向に m 個の半波、 y 方向に n 個の半波からなる正弦波形のたわみを生じるものと仮定し、そのたわみ面を次式で表わす。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (d)$$

その理由は図1(a)に示す微小幅 dx 及び dy の細長い帯要素を近似的にはりと同様に考え、この帯要素に表われる正弦波各半波の両端の条件が、単純支持はりの両端の条件と一致する (すなわち、どちらもたわみと曲げモーメントとがゼロであることを容易に証明できる) からである。

座屈の問題の解法は通常、力のつり合いから求めた微分式の積分による方法のほか、エネルギー法があることは周知されている。エネルギー法においては、例えば図2に示すように x 面に単位長さ当り N_x の荷重が働く場合、これによって

中央面が圧縮されるひずみエネルギー T と
板の座屈による曲げのひずみエネルギー U と

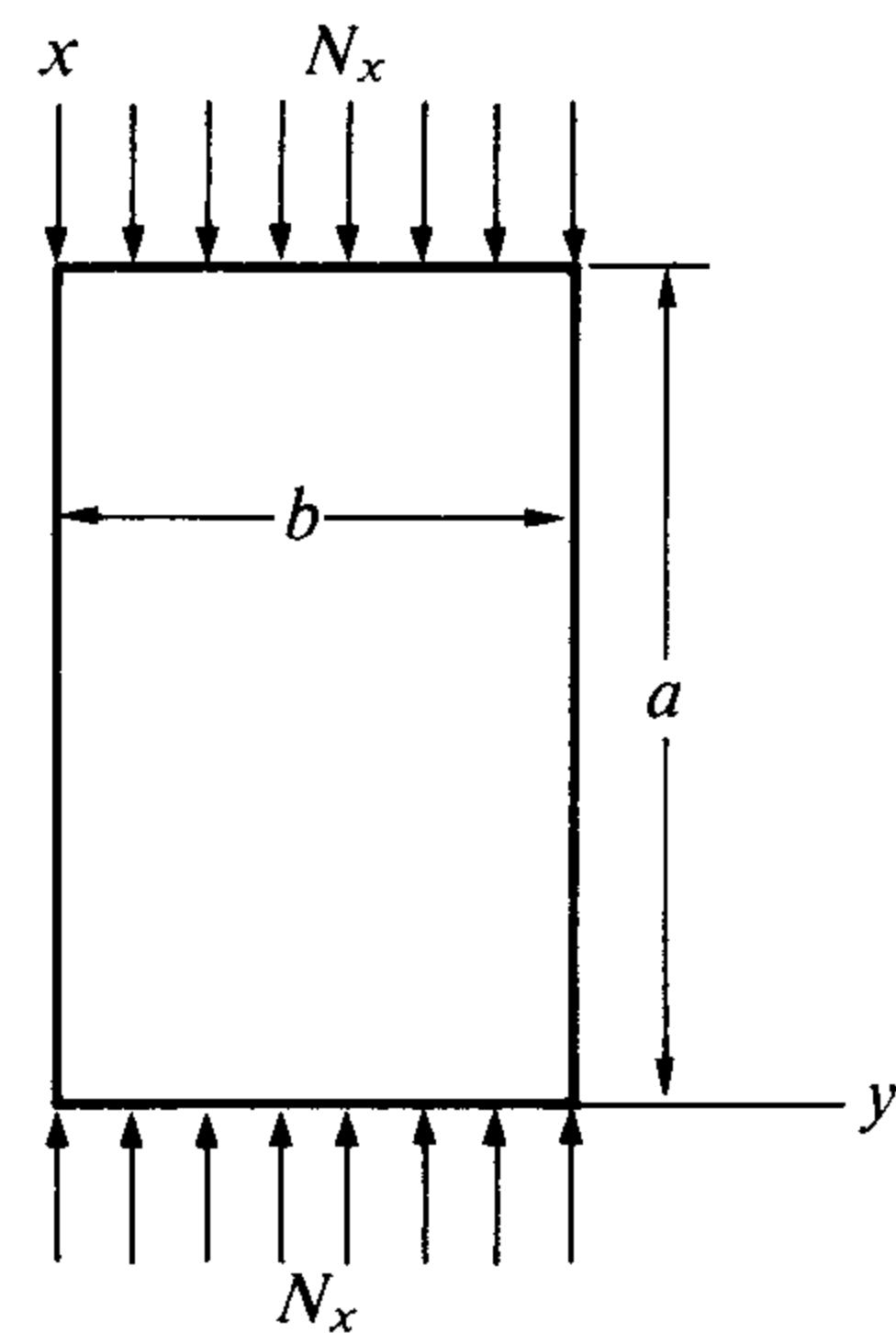


図2 薄板の単軸圧縮

を等価とすることによって N_x を求める式が作られる。座屈荷重 N_{cr} はこの N_x の臨界値、すなわち N_x を極小にする手段を講じた後得られ、それは次式で表わされる。

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right) = K \frac{\pi^2 D}{b^2} \quad (e)$$

ここに因数 K は板の寸法比 a/b の値に依存し、 N_{cr} は因数 K に比例して増減するが、式(e)では K を極小にする必須条件として既に $n=1$ にとられている。

式(e)から座屈応力 σ_{cr} は次式で計算できる。

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{h} = K \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \quad (f)$$

ここに h は板の厚さである。 a/b の変化に対応する K の値を、あらかじめ計算しておく、式(f)から座屈荷重及び座屈応力を直ちに求められるという利点がある。

3. 一方向に一樣な圧縮荷重を受ける単純支持の長方形板の座屈

長方形の薄板 ($a \times b$) が図2のように中央面の $x=0$ および $x=a$ において単純支持されながら単位長さ当り N_x の圧縮荷重を受けて、わずかに座屈が始まった場合を考え、このわずかに座屈した状態のまま板の安定を保つに必要な力の大きさを計算することによって座屈応力を求めるという方法は合理的である。 w を z 方向の変位とすると、このようにして力及びモーメントのつり合いから次式を導くことができる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1)$$

ただし N_x は圧縮に対して正とする。この圧縮力を受けて板は m 個の半波からなる正弦波形を形成して座屈に至ると仮定し、式(1)の解を次式であらわす。

$$w = f(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2)$$

ここに $f(y)$ は y のみの関数である。式(2)はまた、板が上下の端面において単純支持されている、すなわち、たわみと曲げモーメントがゼロであるという条件を満たしている。何故なら、第2節の式(b) M_x の右辺に式(2)を代入すると

$$M_x = D \left\{ \frac{m^2 \pi^2}{a^2} f - \nu \frac{d^2 f}{dy^2} \right\} \sin \frac{m \pi x}{a}$$

となり、この式も式(2)の w もともに $x=0$ 及び $x=a$ のときゼロとなるからである。式(2)を式(1)に代入し次式を得る。

$$\frac{d^4 f}{dy^4} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{d^2 f}{dy^2} + \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} - \frac{N_x m^2 \pi^2}{D a^2} \right) f = 0 \quad (3)$$

式(3)の解を得るため $f(y) = e^{py}$ とおくと次の特性方程式ができる。

$$p^4 - \frac{2m^2 \pi^2}{a^2} p^2 + \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} - \frac{N_x m^2 \pi^2}{D a^2} \right) = 0 \quad (4)$$

式(4)を解いて次の4つの根を得る。

$$p = \pm \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{N_x m^2 \pi^2}{D a^2}}}$$

$$\text{あるいは } p = \pm \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} - \sqrt{\frac{N_x m^2 \pi^2}{D a^2}}}$$

ところが、今我々が取扱わんとする、板の y 面に沿っていろいろな拘束があり、境界条件が変わる問題では当然のことながら、

$$\frac{N_x}{D} > \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \text{ すなわち } \frac{m^2 \pi^2}{a^2} - \sqrt{\frac{N_x m^2 \pi^2}{D a^2}} < 0$$

でなければならず、前記の4根のうち前の2根は実根、後の2根は虚根となるので、これらを $\pm \alpha$ 及び $\pm i\beta$ (α, β は実数) であらわすと、

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{N_x m^2 \pi^2}{D a^2}}} \\ \beta &= \sqrt{-\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{N_x m^2 \pi^2}{D a^2}}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

となり、微分方程式(3)の一般解は次のようになる。

$$f(y) = C_1 e^{-\alpha y} + C_2 e^{\alpha y} + C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y \quad (6)$$

よって式(2)からたわみ面は次式であらわされる。

$$w = (C_1 e^{-\alpha y} + C_2 e^{\alpha y} + C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y) \sin \frac{m \pi x}{a} \quad (7)$$

ここに、 C_1, C_2, C_3, C_4 は任意定数で、板の両側面の拘束条件、すなわち、 $y=0$ 及び $y=b$ の縁辺に沿う境界条件によって決定される。

4. 長方形板の縁辺拘束の種類と境界条件

図2の長方形板について両側の縁辺 $y=0$ 及び $y=b$ に

おけるいろいろな拘束状態に応ずる境界条件を求めておく。

(1) 固定された縁辺

長方形板の固定された縁辺はたわみを抑止され、その z 方向の変位 w はゼロである。また、この縁辺に沿うたわみ面の接平面は板の中央面の初期の位置と一致するのでたわみ角もゼロである。図2において x 軸と一致する縁辺が固定されるとき、この縁辺に沿う境界条件は次式となる。

$$(w)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad (8)$$

(2) 単純支持の縁辺

長方形板の単純支持された縁辺は、これに沿う z 方向の変位 w はゼロであり、同時にこの縁辺を軸として板はそのまわりに自由に回転できる。すなわち、この縁辺に沿う曲げモーメントは存在しない。図2において x 軸と一致する縁辺が単純支持される場合、第2節の式(b)の $M_y = 0$ となるから、この場合の境界条件は次式となる。

$$(w)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0} = 0 \quad (9)$$

(3) 自由縁辺

長方形板の自由縁辺の境界条件については Poisson 説、Kirchhoff 説あるいは Thomson & Tait 説²⁾ などいろいろ異なる考え方があるが、基本的には自由縁辺には曲げモーメントもねじりモーメントもあるいは板面に垂直なせん断力も存在しないということであるが、それでは問題を解くに当たってむしろ条件が多過ぎること、従ってこれを2つの境界条件に削減する必要があるということ、及びその方法に議論が集中した。結局はねじりモーメントとせん断力とを一つにまとめることができるという意見が有力で、例えば図2の $y=b$ の縁辺が自由な場合、

$$(Q_y')_{y=b} = - \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right)_{y=b}$$

とおき、 $y=b$ の縁辺に沿って働くせん断力とねじりモーメントを一つの条件にまとめると次のようになる。

$$(Q_y + Q_y')_{y=0} = 0 \text{ 従って } \left(Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right)_{y=b} = 0$$

上式に第2節の式(a)及び(c)から Q_y 及び $\partial M_{xy} / \partial x$ を代入すると、

$$Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\}$$

となるから境界条件として次式を得る。

$$\left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\}_{y=b} = 0 \quad (10)$$

この式とともに自由縁辺に沿って曲げモーメント M_y がゼロであるという境界条件として第2節の式(b)から次式が成り立つ。

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0} = 0 \quad (11)$$

(4) 弾性支持及び弾性固定の縁辺

長方形板 (図2) の $y=b$ の縁辺が弾性支持はりに固く組み合されている場合, この縁辺沿いのたわみはゼロではなく支持はりのたわみ (z 方向) と等しくなる。縁辺 $y=b$ を軸とする板の回転もまた支持はりのねじりを伴ない, これと一致する。弾性支持はりの曲げ剛性を EI , 同じくねじり剛性を C とする。前項の自由縁辺の境界条件を求める際に考えたように板から支持はりに伝達される力は

$$-\left(Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right)_{y=b} = D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\}_{y=b}$$

であるから, はりの弾性曲線の微分方程式は次式となる。

$$EI \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_{y=b} = D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\}_{y=b} \quad (12)$$

式(12)は長方形板 (図2) の一つの縁辺 $y=b$ が弾性支持または弾性固定される場合, その縁辺に沿う境界条件の一つである。

もう一つの境界条件は支持はりのねじりを考えて求める。図3に示すように x 軸に平行な支持はりの任意断面の回転角は $-(\partial w / \partial y)_{y=b}$ であり, 従ってこの回転角の $y=b$ の縁辺に沿う x 方向の変化率は $-(\partial^2 w / \partial x \partial y)_{y=b}$ となるから, はりのねじりモーメントは

$$-C \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{y=b}$$

で表わされる。このモーメントは $y=b$ の縁辺に沿って変化する。何故なら板の座屈によって $y=b$ の縁辺沿いに変化する曲げを生じ, この曲げが板と固く結合する支

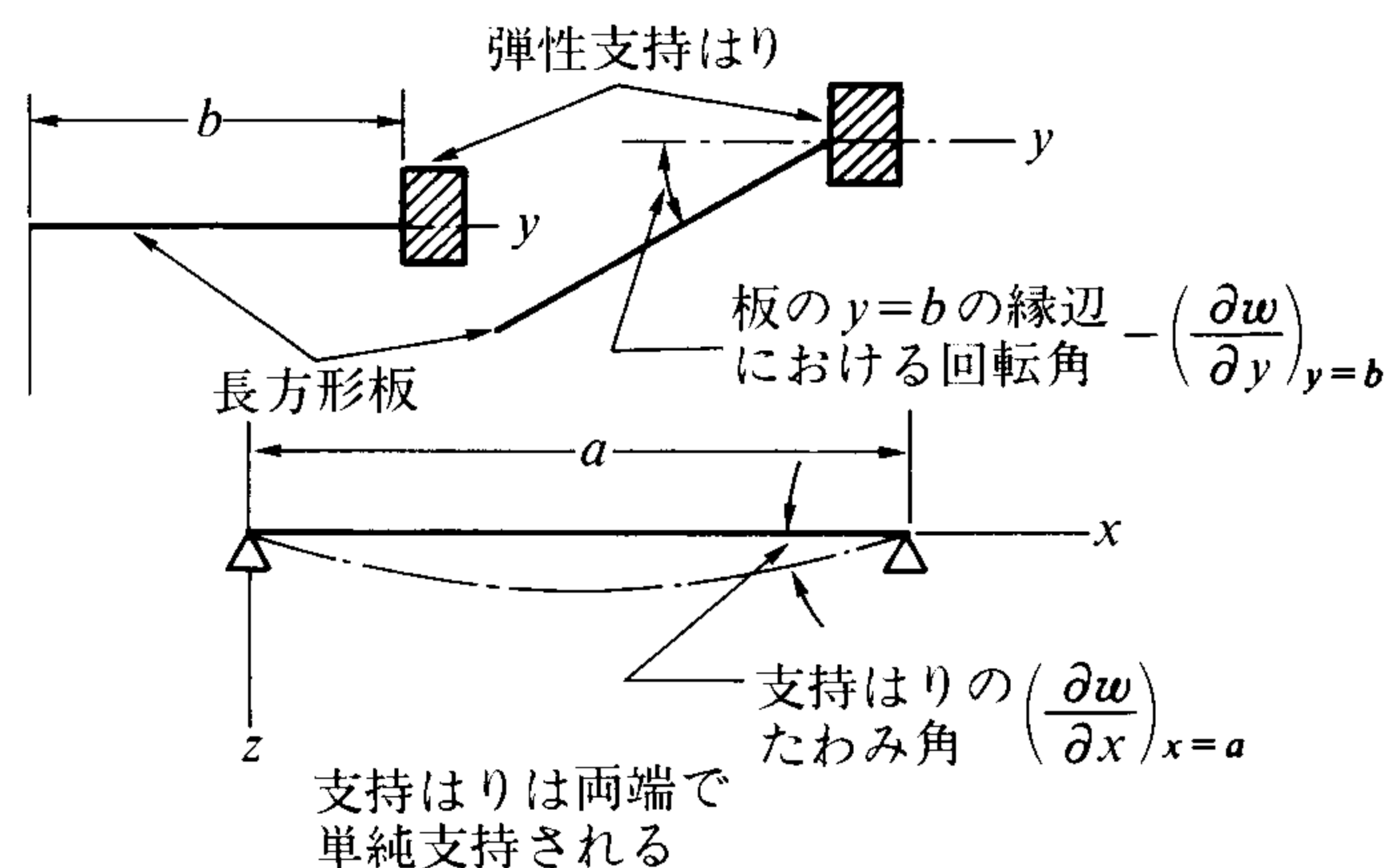


図3 弾性支持はりのねじり

持はりに縁辺沿いに変化するねじりとなって伝わるからである。単位長さ当りのこのねじりモーメントの大きさは板の単位長さ当りの曲げモーメント M_y に等しく, 右手の規約により y 面ではこの両者の符号も等しく次式が成り立つ。

$$C \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{y=b} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b} \quad (13)$$

これは弾性支持または弾性固定における第2の境界条件である。

5. アルミニウム L 形断面材の座屈

薄板の L 形断面材の場合はアングルの稜線 $y=0$ に沿って単純支持され, $y=b$ の縁辺が自由な板の座屈として取り扱う。(図4) この場合の境界条件としては, 前節の式(9)ならびに(10)及び(11)が成り立つ。

方程式(3)の一般解(6)において $y=0$ とおくと,

$$f(0) = C_1 + C_2 + C_3$$

となるから, いまも積分定数を

$$C_1 + C_2 = C_3 = 0 \quad (a)$$

のようにとったとすると, $f(0) = 0$ となるから式(2)から

$$(w)_{y=0} = f(0) \sin \frac{m\pi x}{a} = 0$$

また

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin \frac{m\pi x}{a} - \nu f \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \right)_{y=0} \\ &= \left\{ \alpha^2 (C_1 + C_2) - \beta^2 C_3 - \nu f(0) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

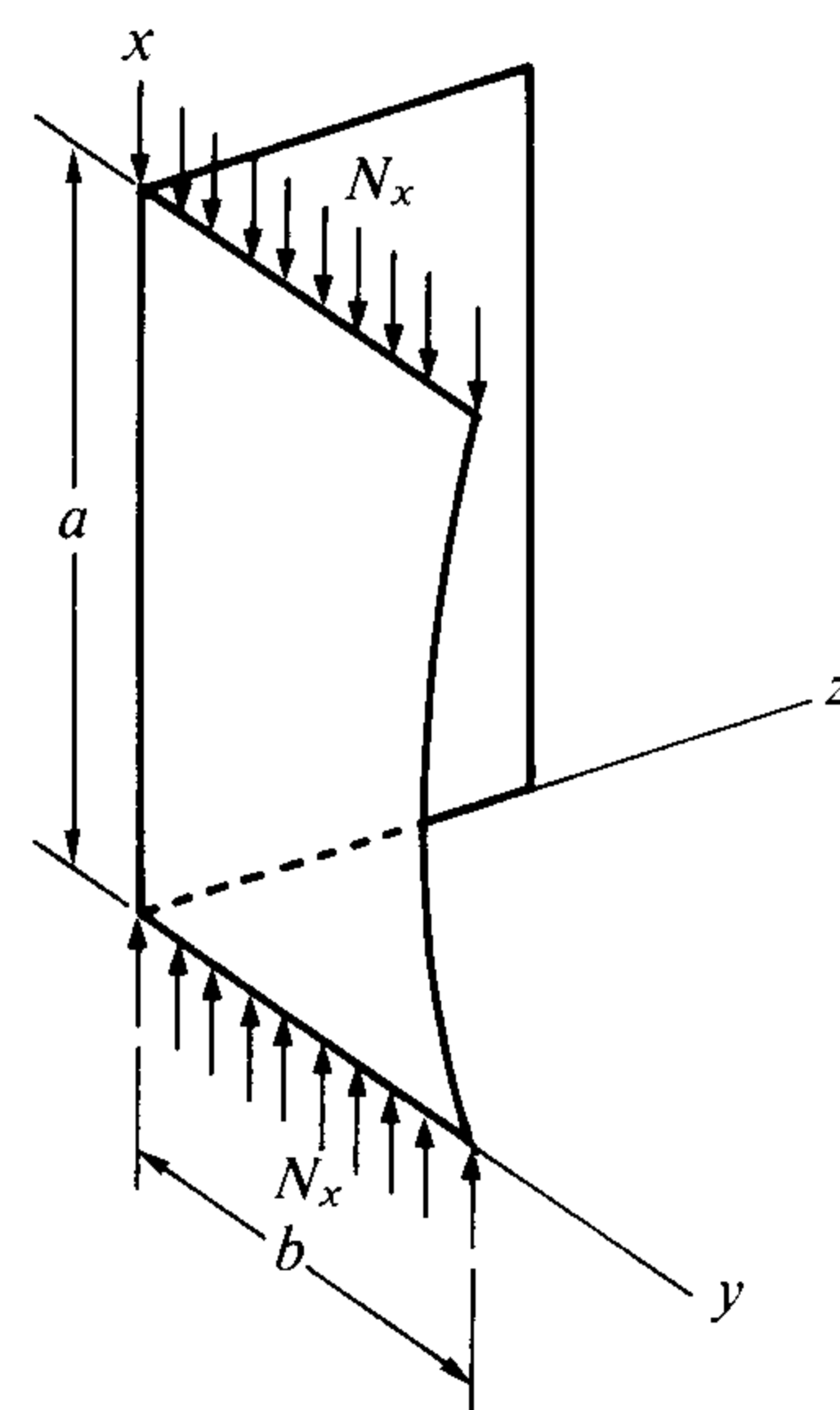


図4 L形断面材の単軸圧縮

となって式(9)の境界条件は満足される。式(a)の $C_1 = -C_2$ 及び $C_3=0$ を式(6)に代入すると

$$f(y) = C_2(e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}) + C_4 \sin \beta y$$

となるが、これを次のように表現する。

$$f(y) = F \sinh \alpha y + H \sin \beta y \quad (b)$$

ここに F, H は定数である。式(b)を式(2)に代入する。

$$w = (F \sinh \alpha y + H \sin \beta y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (c)$$

これから

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{m^2 \pi^2}{a^2} (F \sinh \alpha y + H \sin \beta y) \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = (\alpha^2 F \sinh \alpha y - \beta^2 H \sin \beta y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

また

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{m^2 \pi^2}{a^2} (\alpha F \cosh \alpha y + \beta H \cos \beta y) \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = (\alpha^3 F \cosh \alpha y - \beta^3 H \cos \beta y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

以上の各式を用いて境界条件の式(11)及び式(10)から次式を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} F \left(\alpha^2 - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \sinh \alpha y \\ - H \left(\beta^2 + \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \sin \beta y \end{array} \right\}_{y=b} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F \alpha \left\{ \alpha^2 - (2-\nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right\} \cosh \alpha y \\ - H \beta \left\{ \beta^2 + (2-\nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right\} \cos \beta y \end{array} \right\}_{y=b} = 0 \quad (d)$$

ここで

$$\alpha^2 - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} = S, \quad \beta^2 + \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} = t, \quad \text{とおくと,}$$

$$s - t = 2(1 - \nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \quad \text{となるので}$$

$$\alpha^2 - (2 - \nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} = t, \quad \beta^2 + (2 - \nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} = S$$

となり式(d)は次のように簡略化される。

$$\left\{ \begin{array}{l} F \cdot s \cdot \sinh \alpha b - H \cdot t \cdot \sin \beta b = 0, \\ F \alpha t \cdot \cosh \alpha b - H \beta s \cdot \cos \beta b = 0 \end{array} \right\} \quad (e)$$

式(e)は F 及び H に関する一次の連立方程式で $F=H=0$ は式(e)の一つの解であるが、このとき式(b)及び式(2)から $w=0$ となって座屈問題とは無関係になる。従って、 $(F, H) \neq (0, 0)$ の解が存在するためには式(e)の係数行列式がゼロでなければならない。

$$\begin{vmatrix} s \cdot \sinh \alpha b & -t \cdot \sin \beta b \\ \alpha t \cdot \cosh \alpha b & -\beta s \cdot \cos \beta b \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore -\beta s^2 \cdot \sinh \alpha b \cdot \cos \beta b + \alpha t^2 \cdot \cosh \alpha b \cdot \sin \beta b = 0$$

上式の両辺を $-\cosh \alpha b \cdot \cos \beta b$ で割って次式を得る。

$$\beta s^2 \cdot \tanh \alpha b = \alpha t^2 \tan \beta b \quad (f)$$

係数 s, t を還元して次式となる。

$$\beta \left(\alpha^2 - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right)^2 \tanh \alpha b = \alpha \left(\beta^2 + \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right)^2 \tan \beta b \quad (14)$$

この超越方程式(14)を解くにあたり図式解法を用い、図上で α の最小値を求めた。その際、精度を高めるためにはニュートン・ラプソン法を適用した。先ず式(5)から

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2}}$$

を求め、これを代入して式(14)は α の関数 $F(\alpha)$ として解くこととなる。 α (radian) を横軸に、 $F(\alpha)$ を縦軸にとってえがいた線図のうち a/b の値を 1, 2, 3, 4 にとつたものを図5~8に示す。通常、図式解法は式(14)のように左右辺に分けて左右辺を別々の曲線にえがき、重ね合せて交点を求める方法がとられるが、筆者らは予め虚数の範囲を除外するため左右辺を一つに集めて $F(\alpha) \sim \alpha$ 線図をえがき、横軸 $F(\alpha)=0$ との交点を求めた。 α の極小値が求まると、座屈荷重は式(5)から導く次式で計算できる。

$$N_{cr} = D \frac{a^2}{m^2 \pi^2} \left(\alpha^2 - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right)^2 \quad (15)$$

また、座屈応力 σ_{cr} は N_{cr} の値を第2節の式(f)に代入して計算できる。厚さ $h=1.2$ mm, 幅 $b=50$ mm の等辺 L 形のアルミニウム型材について、 $E=70.6$ GPa, $\nu=0.34$ として上記のように超越方程式から a/b の比の値に対応する座屈荷重と座屈応力を求めた結果を表1まとめた。この表の因数 K の値は第2節の式(f)から得る次式によって計算したものである。

$$\sigma_{cr} = K \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^2 \quad (g)$$

表1から K の近似値を計算できる次の式を導いた。

$$K \cong 0.403 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \quad (h)$$

長い板 ($a/b > 4$) に対してはこの式から十分正確な K の値が得られ、これを用いて式(g)から容易に σ_{cr} を計算することができる。

また、縦弾性係数及び板の幅や厚さの異なる材料に対して換算を行なって表1を適用することができる。すなわち異なる材料の縦弾性係数を E_1 , 厚さと幅の比を $(h/b)_1$ とすると

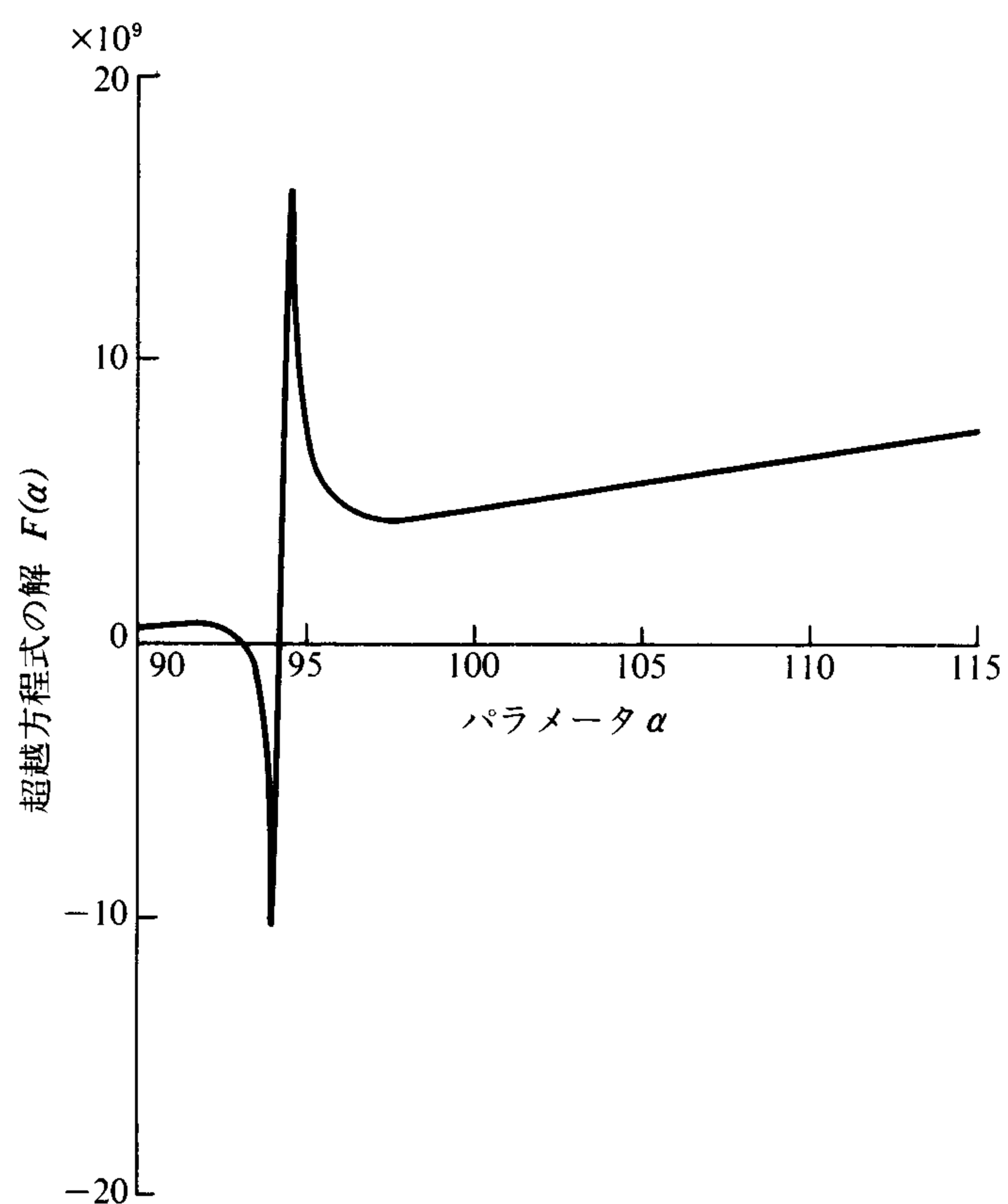


図5 L形断面材の超越方程式 $F(\alpha) \sim \alpha$ 線図
($a/b=1.0$)

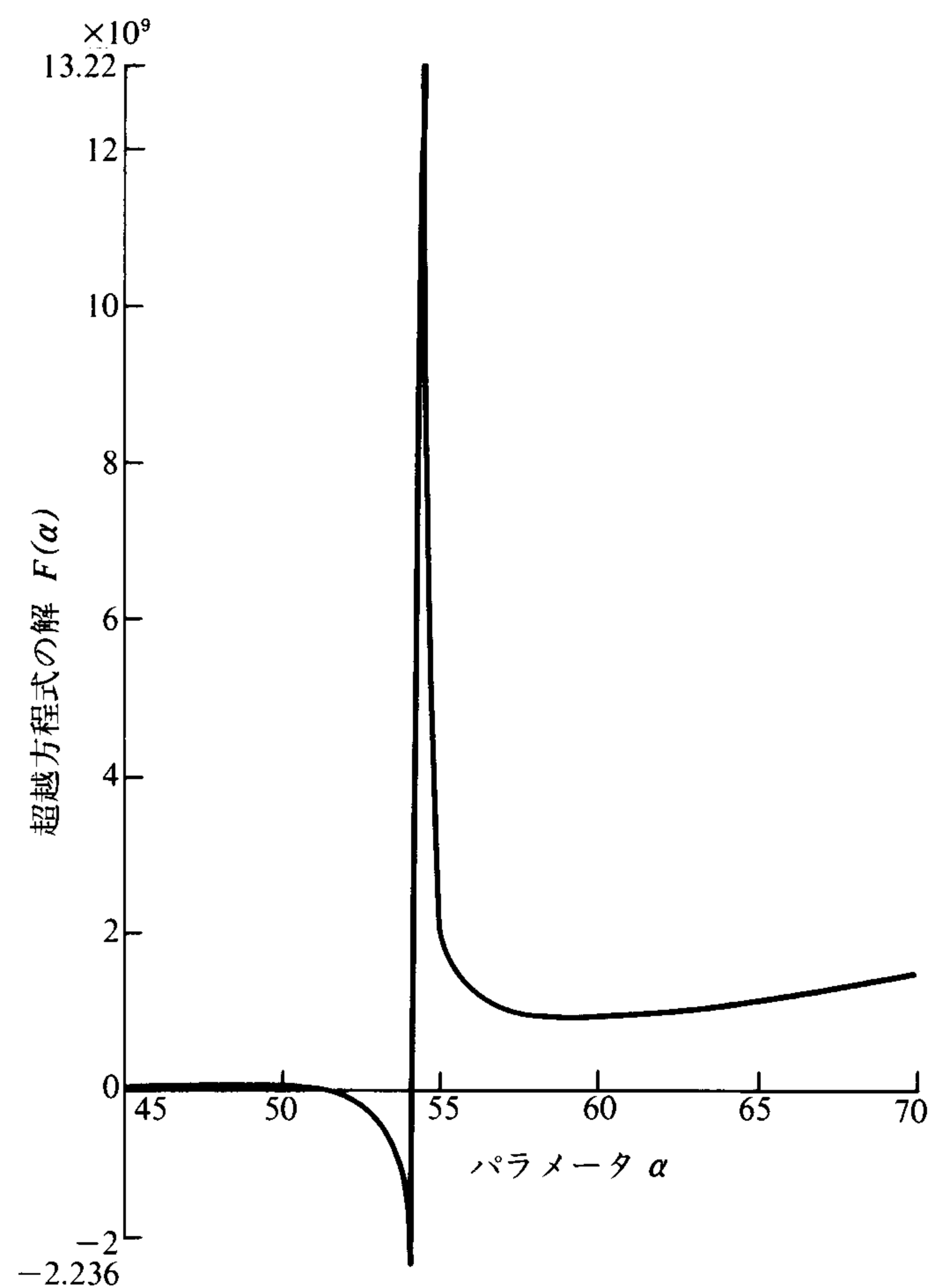


図6 L形断面材の超越方程式 $F(\alpha) \sim \alpha$ 線図
($a/b=2.0$)

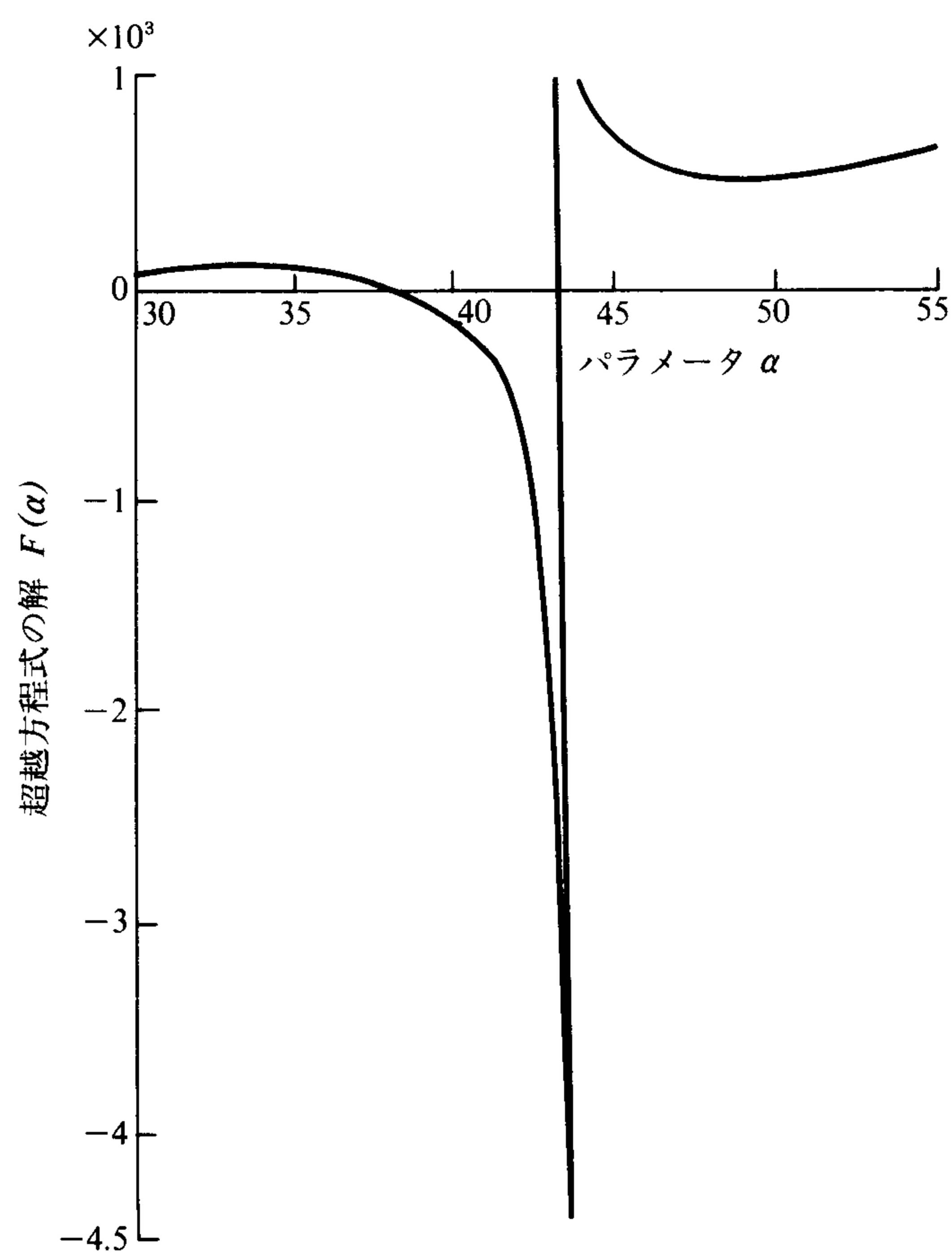


図7 L形断面材の超越方程式 $F(\alpha) \sim \alpha$ 線図
($a/b=3.0$)

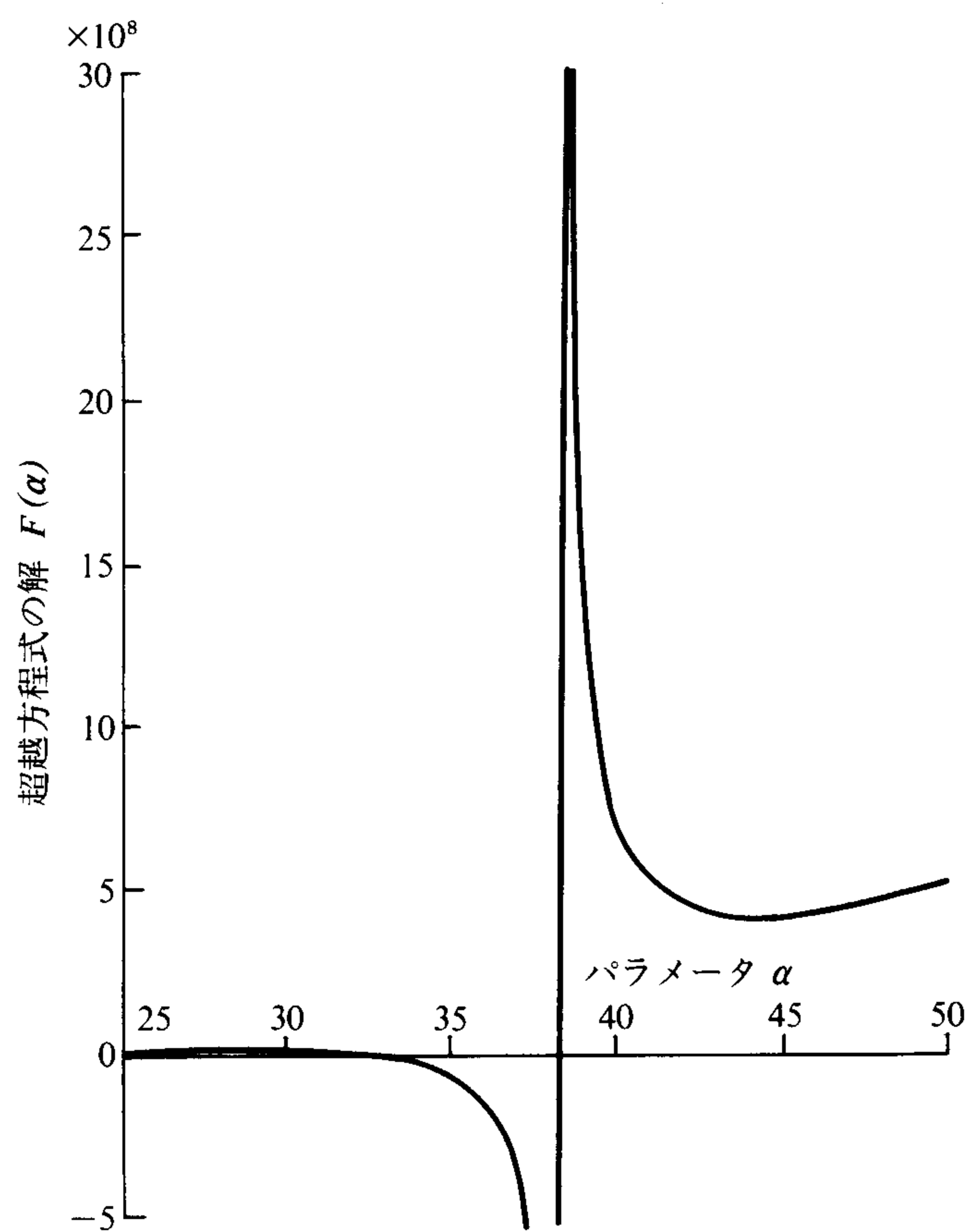


図8 L形断面材の超越方程式 $F(\alpha) \sim \alpha$ 線図
($a/b=4.0$)

表1 アルミニウム等辺 L 形断面型材の a/b 比に対応する因数 K , 座屈荷重 N_{cr} 及び座屈応力 σ_{cr} の値, ただし $E=70.6\text{GPa}$, $\nu=0.34$, $h/b=0.024$

a/b	0.5	1.0	1.2	1.4	1.6
K	4.30	1.372	1.074	0.895	0.779
$N_{cr}\text{KN/m}$	195.1	62.3	43.8	40.6	35.4
$\sigma_{cr}\text{MPa}$	162.6	51.9	40.6	33.9	29.5

a/b	1.8	2.0	2.5	3.0	4.0
K	0.700	0.643	0.556	0.509	0.462
$N_{cr}\text{KN/m}$	31.8	29.2	25.2	23.1	20.9
$\sigma_{cr}\text{MPa}$	26.5	24.3	21.0	19.2	17.5

$$\begin{aligned} \text{換算係数 } \zeta &= \frac{E_1}{70.6 \times 10^9 \times (2.4 \times 10^{-2})^2} \cdot \left(\frac{h}{b}\right)_1^2 \\ &= \frac{E_1}{4.057 \times 10^7} \left(\frac{h}{b}\right)_1^2 \quad (i) \end{aligned}$$

これを表1の K にかけて用いると, この場合の座屈応力を計算できる。図9は座屈した板の半波の数と a/b の

比の値と因数 K の関係を表わすもので, 試験片の寸法から予め半波の数や座屈荷重の大きさを概略予知できるなどの便宜がある。

6. アルミニウム T 形断面型材の座屈

図10のような T 形断面型材はウェブ部がもし座屈を起しても, フランジ部の曲げ剛性とねじり剛性により大きな抵抗を示す。しかし, この場合フランジの果すウェブ部側面支持の効果は完全な固定支持と単純支持の中間条件ともいふべきもので, ウェブが座屈する間フランジとの結合部において自由に回転できるともいえないし, また剛体的に固定されているともいえない。すなわち, フランジはいくらか回転し, この縁辺に沿って現われる曲げモーメントはこの回転角に比例する。これは第4節(4)項で述べた弾性固定の条件が適用できる場合である。すなわちウェブの $y=0$ の縁辺に結合されたフランジのねじり剛性を C とするとき第4節の条件式(13)を適用できる。

$$-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0} = C \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=0} \quad (a)$$

しかし, ウェブの上縁 $y=0$ では xz 面内でのフランジの曲げ剛性が非常に大きく $y=0$ における z 方向のたわみ $w=0$ とみなすことができるから, 式(2)から

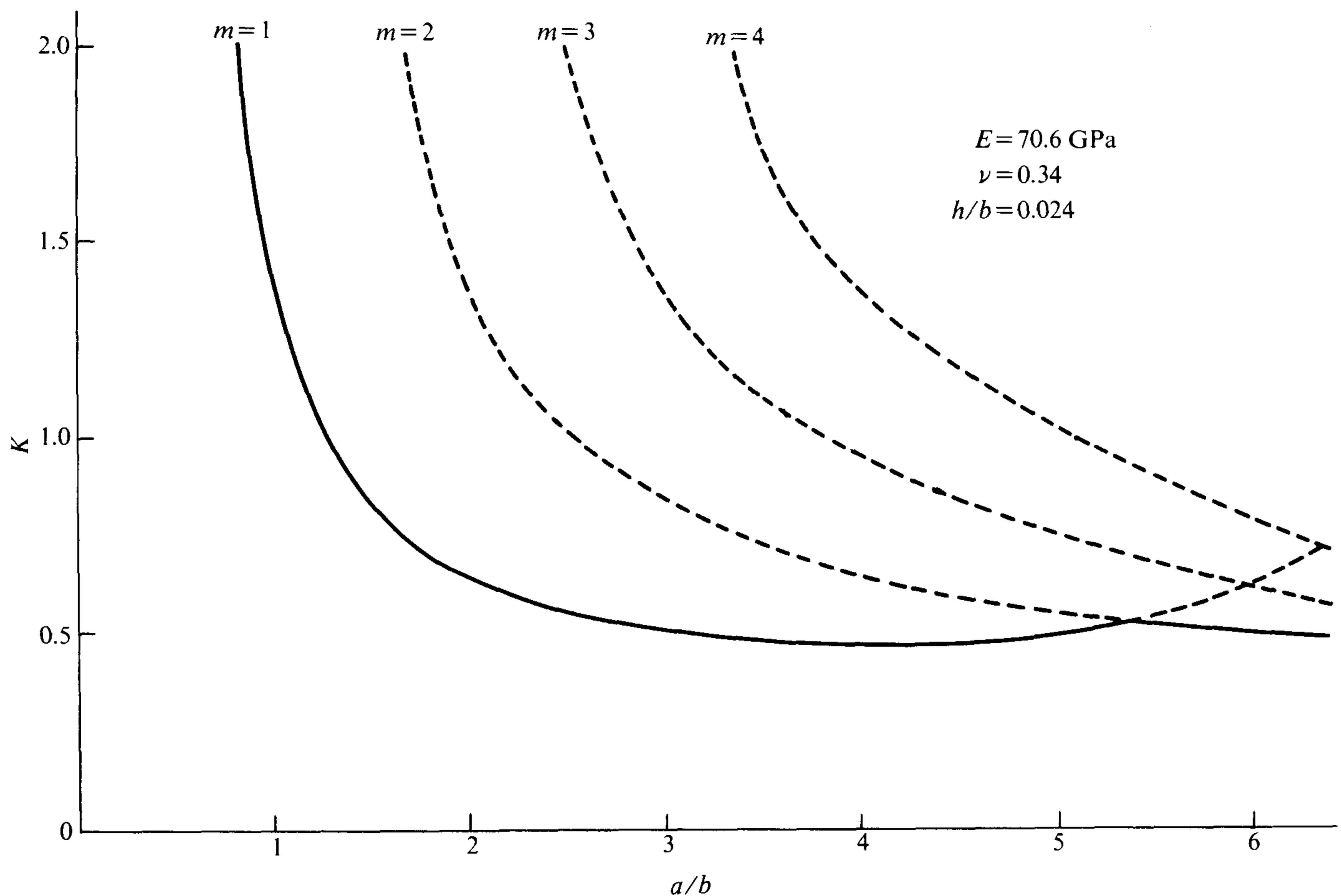


図9 アルミニウム等辺 L 形断面型材の $K \sim a/b$ 関係図

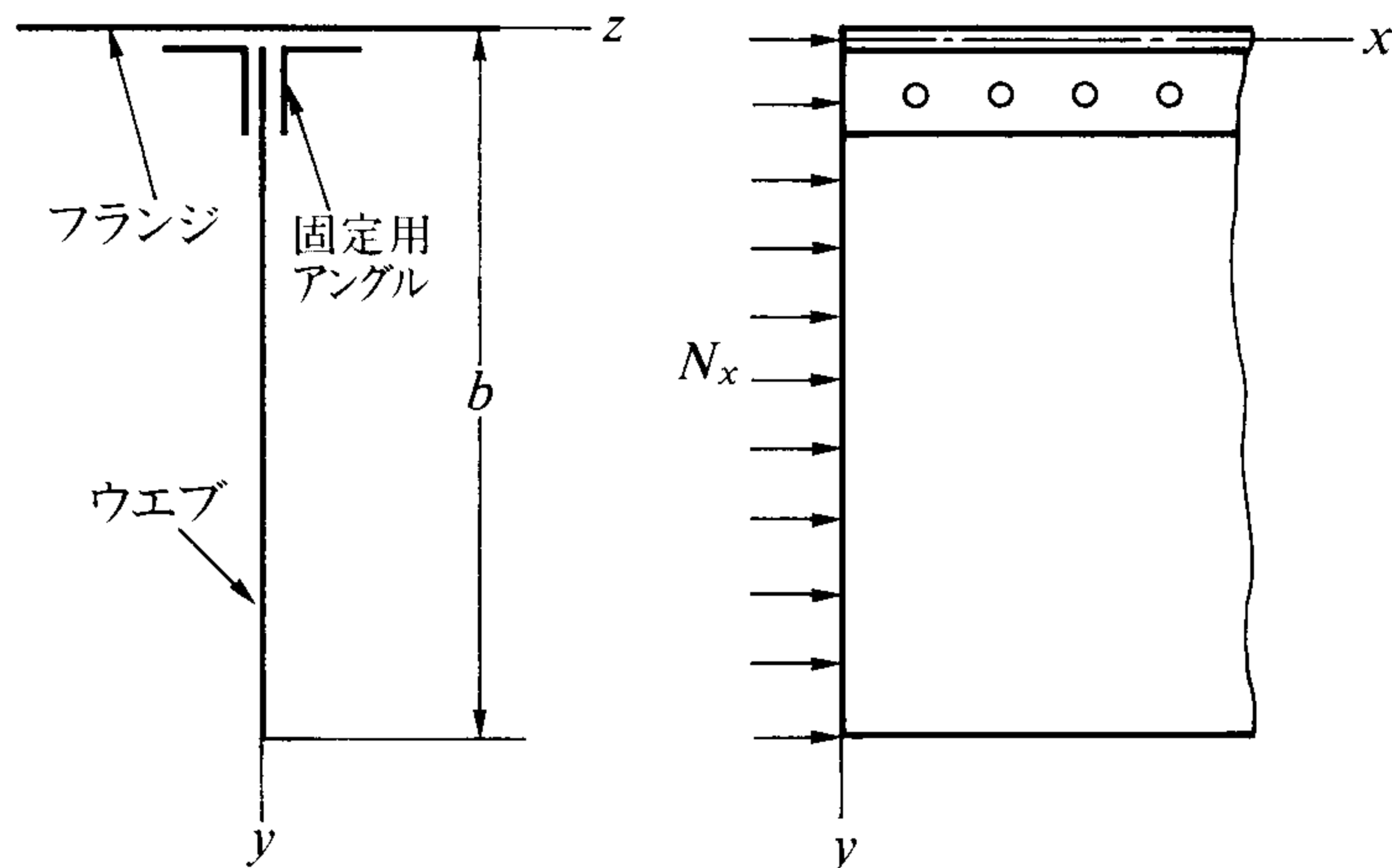


図10 T形断面材の単軸圧縮

$$(w)_{y=0} = \{f(y)\}_{y=0} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} = 0 \quad \therefore \{f(y)\}_{y=0} = 0$$

となるから、よつて式(6)から次の関係を得る。

$$C_1 + C_2 = -C_3 \quad (b)$$

また、式(2)から

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -f(y) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0} = -\{f(y)\}_{y=0} \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{m\pi x}{a} = 0 \quad (c)$$

となる。次に式(7)から

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \{\alpha^2 (C_1 + C_3) - \beta^2 C_3\} \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=0} = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \{\alpha (C_1 - C_2) - \beta C_4\} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (d)$$

を得、式(c)と(d)を式(a)に代入し、これに式(b)の関係をを用いて整理すると次式を得る。ただし $m=1$ にとる。理由は因数 K の最小値は $m=2$ のときも $m=3$ のときも理論上では同じで、 $m=1$ の場合について調べれば足りるからである。

$$C_1 - C_2 = \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{D}{C} \cdot \frac{a^2}{\pi^2} (\alpha^2 + \beta^2) C_3 + \beta C_4 \right\} \quad (e)$$

式(b)と式(e)から C_1 と C_2 は次のように置き換えられる。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma\alpha}{2\gamma\alpha} C_3 + \frac{\beta}{2\alpha} C_4, \\ C_2 &= -\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma\alpha}{2\gamma\alpha} C_3 - \frac{\beta}{2\alpha} C_4 \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

ここに γ は固定係数である。

$$\gamma = \frac{C}{D} \cdot \frac{\pi^2}{a^2}$$

式(7)に式(f)を代入して次式を得る。

$$w = \left\{ C_3 \left(\cos \beta y - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma\alpha} \sinh \alpha y - \cosh \alpha y \right) + C_4 \left(\sin \beta y - \frac{\beta}{\alpha} \sinh \alpha y \right) \right\} \sin \frac{\pi x}{a}$$

上式から

$$(\partial^2 w / \partial y^2)_{y=b}, (\partial^2 w / \partial x^2)_{y=b}, (\partial^3 w / \partial y^3)_{y=b}$$

及び

$$(\partial^3 w / \partial x^2 \partial y^2)_{y=b}$$

をつくって式(10)及び式(11)に代入する。先ず式(11)から次式を得る。

$$C_3 \left\{ \left(\beta^2 + \nu \frac{\pi^2}{a^2} \right) \cos \beta b + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma\alpha} \left(\alpha^2 - \nu \frac{\pi^2}{a^2} \right) \times \sinh \alpha b + \left(\alpha^2 - \nu \frac{\pi^2}{a^2} \right) \cosh \alpha b \right\}$$

$$+ C_4 \left\{ \left(\beta^2 + \nu \frac{\pi^2}{a^2} \right) \sin \beta b + \frac{\beta}{\alpha} \times \left(\alpha^2 - \nu \frac{\pi^2}{a^2} \right) \sinh \alpha b \right\} = 0$$

また、式(10)から次式を得る。

$$C_3 \left[\beta \left\{ \beta^2 + (2 - \nu) \frac{\pi^2}{a^2} \right\} \sin \beta b - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma} \times \left\{ \alpha^2 - (2 - \nu) \frac{\pi^2}{a^2} \right\} \cosh \alpha b - \alpha \left\{ \alpha^2 - (2 - \nu) \frac{\pi^2}{a^2} \right\} \sinh \alpha b \right]$$

$$- C_4 \left[\beta \left\{ \beta^2 + (2 - \nu) \frac{\pi^2}{a^2} \right\} \cos \beta b + \beta \left\{ \alpha^2 - (2 - \nu) \frac{\pi^2}{a^2} \right\} \cosh \alpha b \right] = 0$$

前節と同様の係数変換を行なうと上2式は次のように簡略化される。

$$\left. \begin{aligned} C_3 (t \cdot \cos \beta b + qs \cdot \sin \alpha b + s \cdot \cosh \alpha b) \\ + C_4 \left(t \sin \beta b + \frac{\beta}{\alpha} s \cdot \sinh \alpha b \right) &= 0 \\ C_3 (\beta s \cdot \sin \beta b - \alpha qt \cdot \cosh \alpha b - \alpha t \cdot \sinh \alpha b) \\ - C_4 (\beta s \cdot \cos \beta b + \beta t \cdot \cosh \alpha b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここに

$$s = \alpha^2 - \nu \frac{\pi^2}{a^2}, \quad t = \beta^2 + \nu \frac{\pi^2}{a^2}, \quad q = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma\alpha}$$

前節で説明したように座屈荷重 N_σ は式(17)の係数行列式をゼロとおいて求めることができる。

$$\begin{vmatrix} t \cdot \cos \beta b + q s \sinh \alpha b + s \cdot \cosh \alpha b & t \cdot \sin \beta b + \frac{\beta}{\alpha} s \cdot \sinh \alpha b \\ \beta s \cdot \sin \beta b - \alpha q t \cdot \cosh \alpha b - \alpha t \cdot \sinh \alpha b & -(\beta s \cdot \cos \beta b + \beta t \cdot \cosh \alpha b) \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (t \cdot \cos \beta b + q s \cdot \sinh \alpha b + s \cdot \cosh \alpha b) \cdot (\beta s \cdot \cos \beta b + \beta t \cdot \cosh \alpha b) + (\beta s \cdot \sin \beta b - \alpha q t \cdot \cosh \alpha b - \alpha t \cdot \sinh \alpha b) \cdot \left(t \cdot \sin \beta b + \frac{\beta}{\alpha} s \cdot \sinh \alpha b \right) = 0$$

これを展開整理して次式を得る。

$$2\beta s t + \beta (s^2 + t^2) \cos \beta b \cdot \cosh \alpha b - \frac{1}{\alpha} (\alpha^2 t^2 - \beta^2 s^2) \cdot \sin \beta b \cdot \sinh \alpha b + \beta q s^2 \cdot \cos \beta b \cdot \sinh \alpha b - \alpha q t^2 \cdot \sin \beta b \cdot \cosh \alpha b = 0$$

両辺を $\beta \cos \beta b \cdot \cosh \alpha b$ で割る。

$$\frac{2st}{\cos \beta b \cdot \cosh \alpha b} + (s^2 + t^2) - \left(\frac{\alpha}{\beta} t^2 - \frac{\beta}{\alpha} s^2 \right) \tan \beta b \cdot \tanh \alpha b + q s^2 \cdot \tanh \alpha b - \frac{\alpha}{\beta} q t^2 \cdot \tan \beta b = 0 \quad (18)$$

前節で記したとおり

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - 2 \frac{\pi^2}{a}}, \quad s = \alpha^2 - \nu \frac{\pi^2}{a^2}, \quad t = \alpha^2 - (2 - \nu) \frac{\pi^2}{a^2}$$

また,

$$q = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma \alpha} = 2a \sqrt{N_{cr} \cdot D} / C \pi \alpha$$

であり, これらを式(18)に代入すれば超越方程式(18)を α について解くことができる。

図11~13は式(18)の図式解法として求めた $F(\alpha) \sim \alpha$ 線図の一部で, これらの線図から α の最小値を求め, 前節と同様の手順によって a/b の比の値に対応する座屈荷重, 座屈応力及び因数 K を計算し, これらを表2にまとめた。

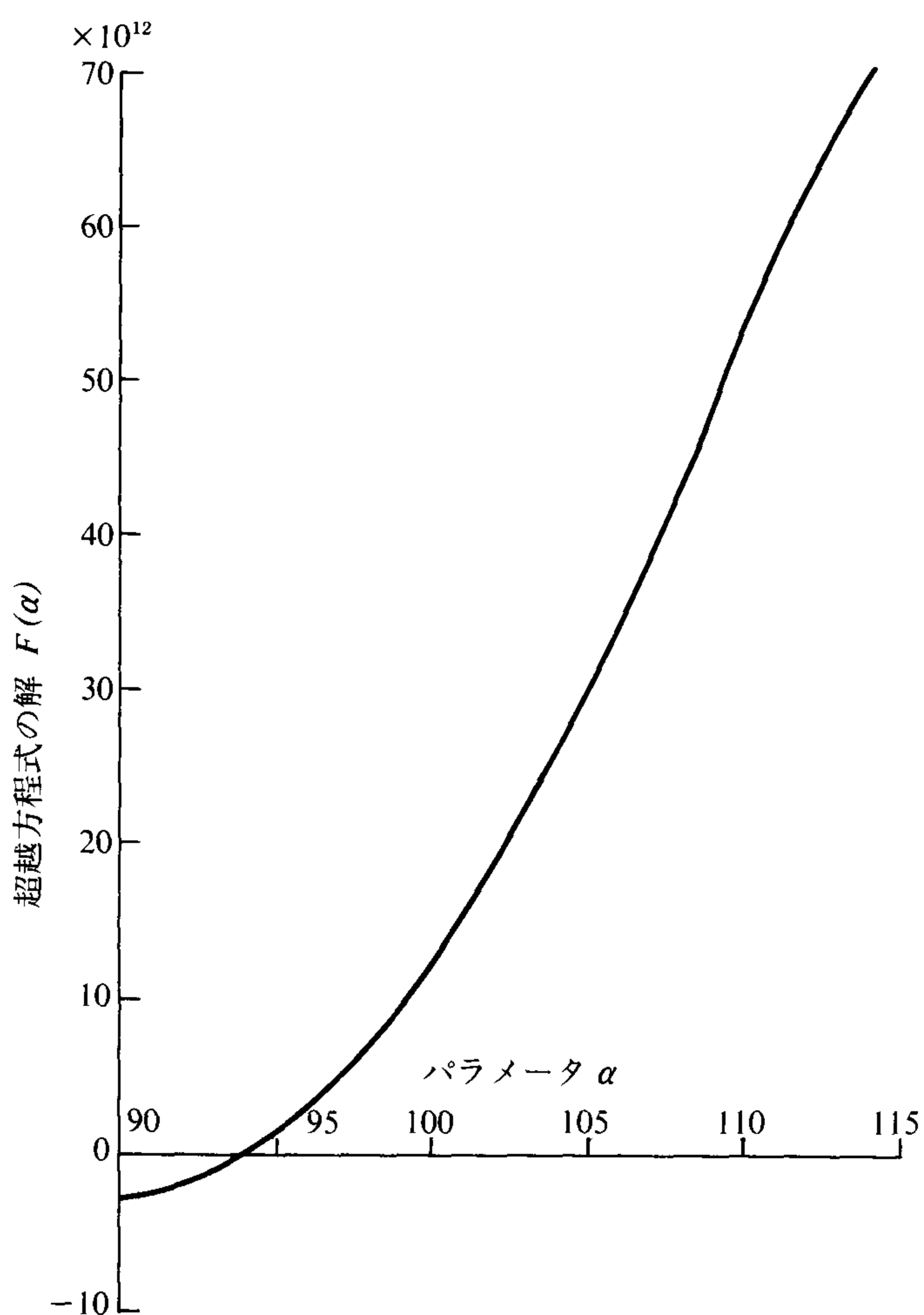


図11 T形断面型材の超越方程式 $F(\alpha) \sim \alpha$ 線図 ($a/b=1.0$)

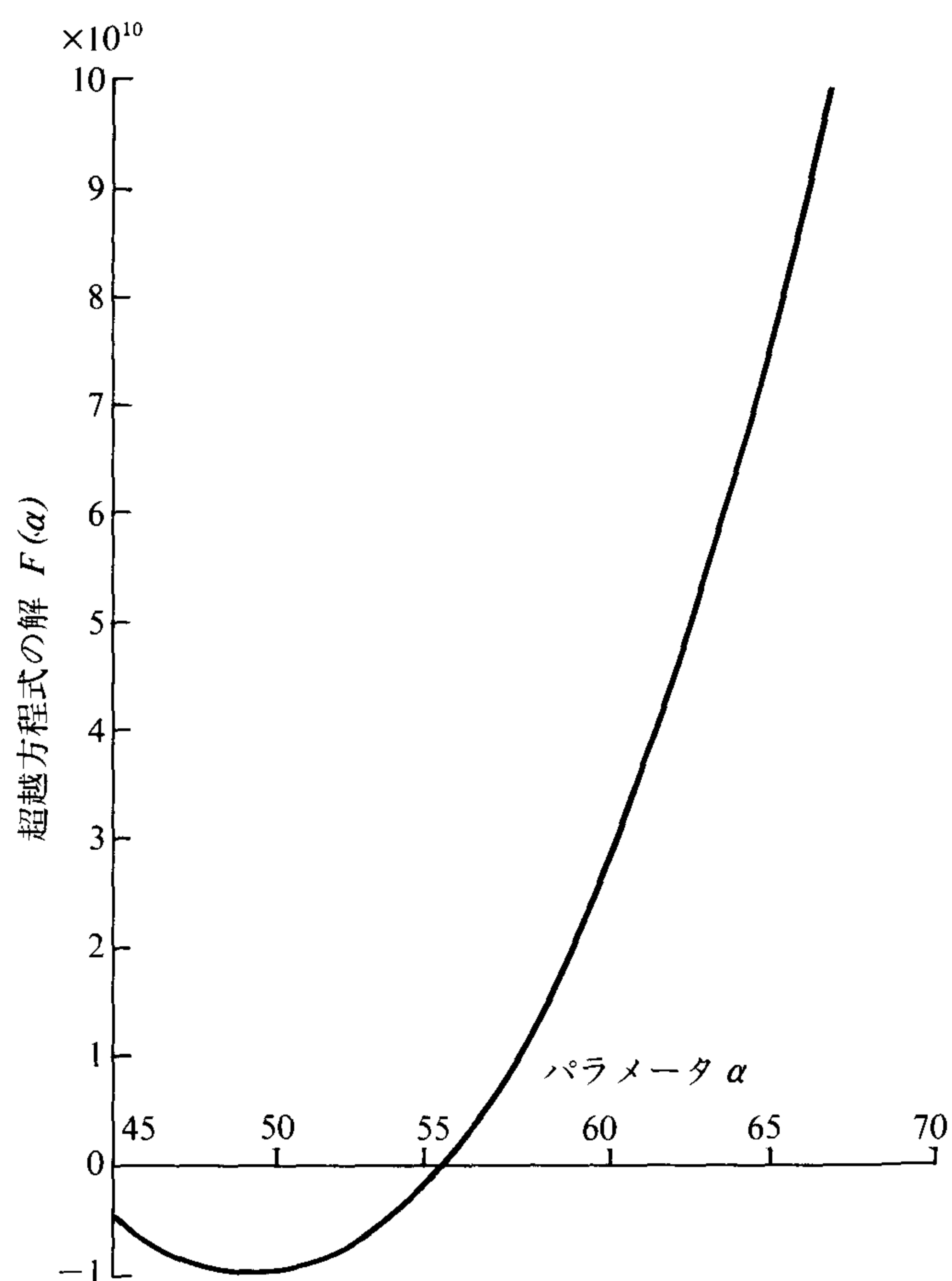


図12 T形断面型材の超越方程式 $F(\alpha) \sim \alpha$ 線図 ($a/b=2.0$)

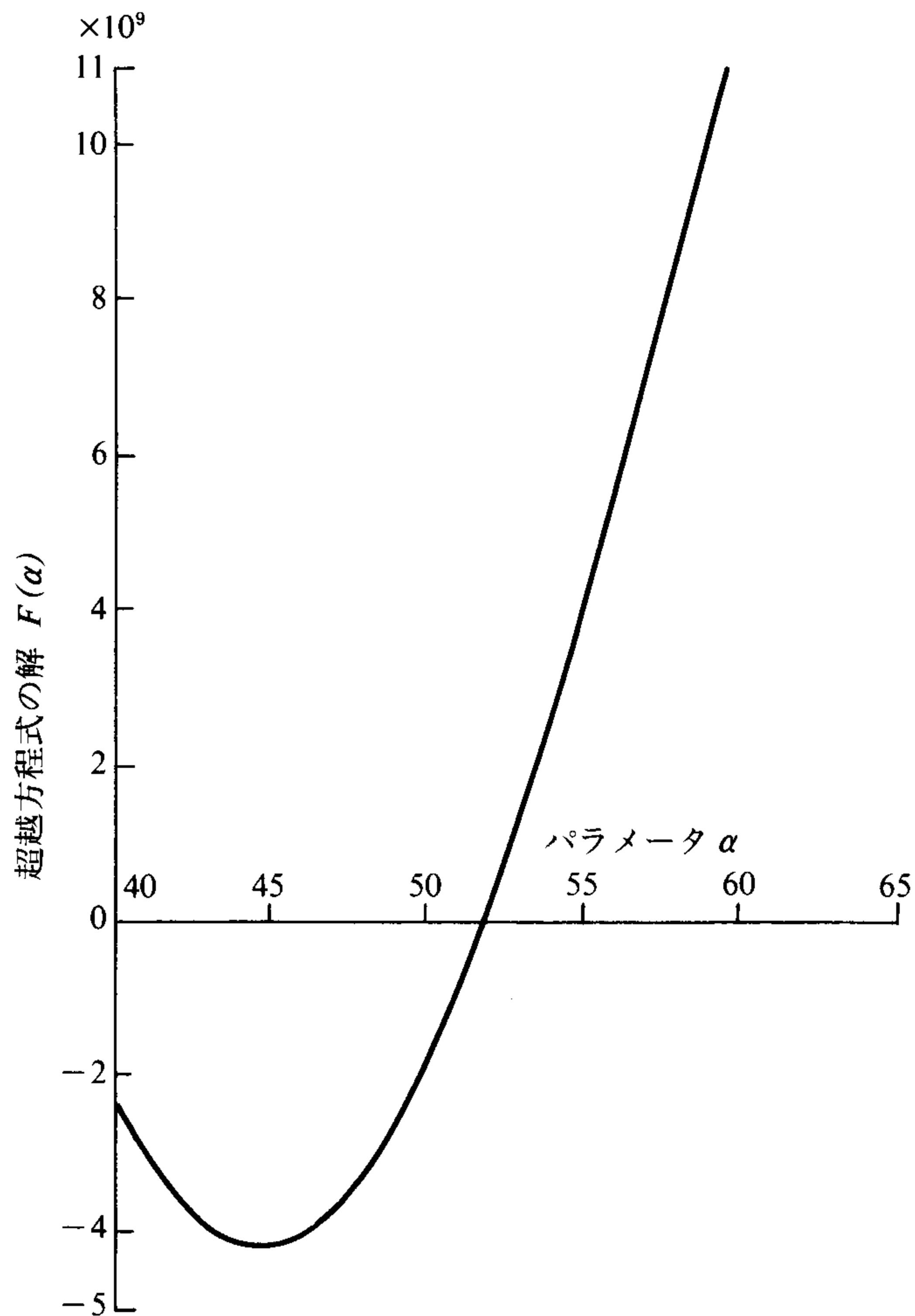


図13 T形断面形材の超越方程式 $F(\alpha) \sim \alpha$ 線図 ($a/b=2.3$)

この問題では因数 K が固定係数 γ の大きさに左右されて変化する事がわかった。すなわち、 γ の増加に伴って増大し弾性固定から完全固定の場合に近づくことを試算によって確認し得た。表2の因数 K は試験片の材質及び寸法によって割り出した $\gamma b = 2.57$ に対して計算した値である。この表では K の最小値は $a/b = 1.8$ に対応しているが、 γb の値が増すにつれて最小値は表の左の方へ移動する。

ウェブの縦横寸法比 a/b の値に対応する因数 K の値を求める便宜のために図14を作図した。表2及び図14を利用する方法及び材質の異なる他の寸法の板にこれらを換算して適用する方法〔式(i)参照〕は前節に述べたのと同様である。

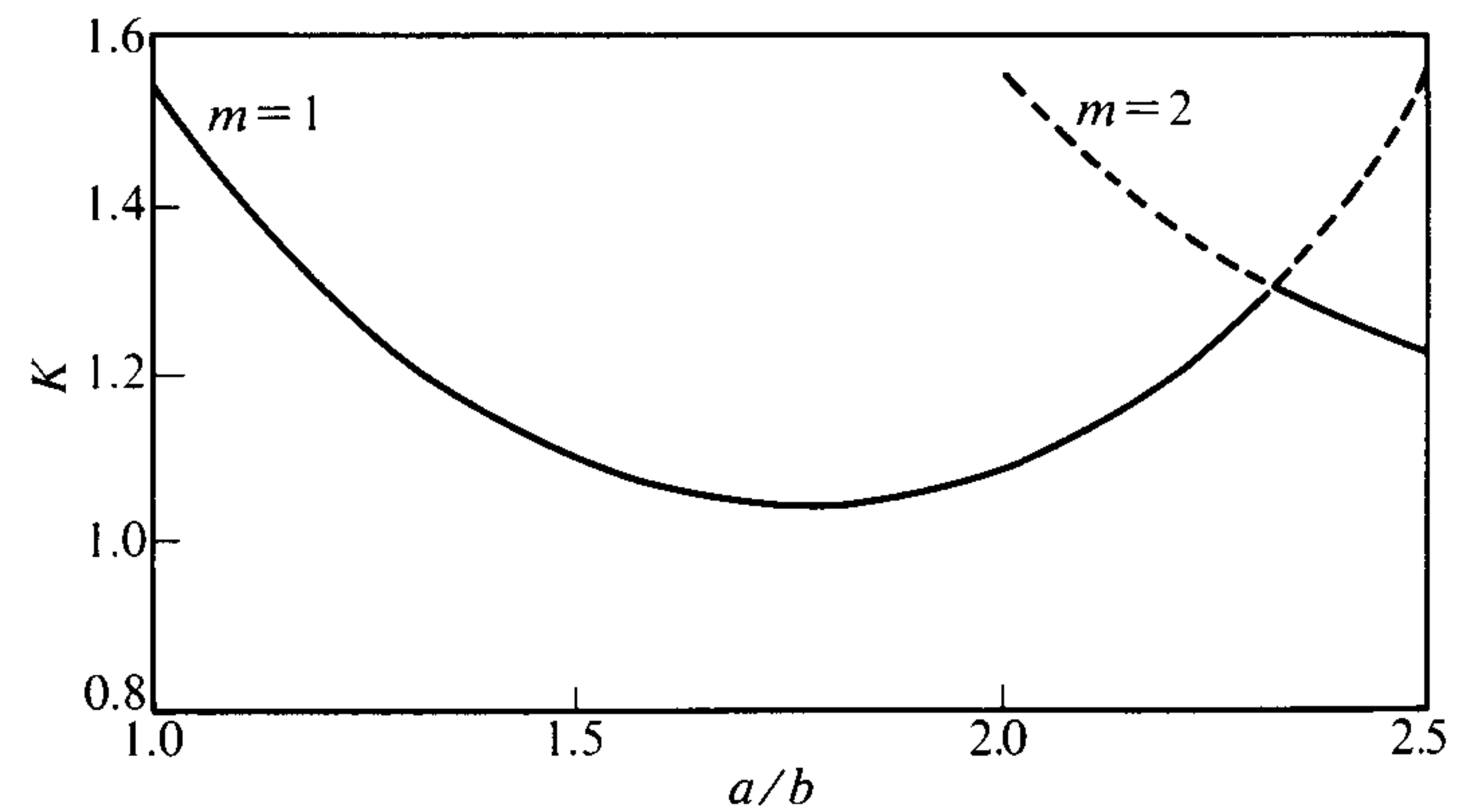


図14 アルミニウム T 形断面形材 (50×50×2) の $K \sim a/b$ 関係図 ($E=70.6\text{GPa}$, $\nu=0.34$, $h/b=0.04$, $\gamma b=2.57$)

7. 実 験

純度99%以上のアルミニウム等辺 L 形 (30×30×2) 及び T 形 (50×50×2) 断面の形材を試験片に用い、島津製コンピューター計測制御式万能試験機による試験を行った。計測記録は機械付属のコンピューター制御 X-T 記録計によるほか、直接試験片に貼ったひずみゲージによる動ひずみの記録と測定を行った。

(1) L 形断面形材の試験

a. 試験準備

試験片の形状寸法は図15に示すように、幅 b を一定に

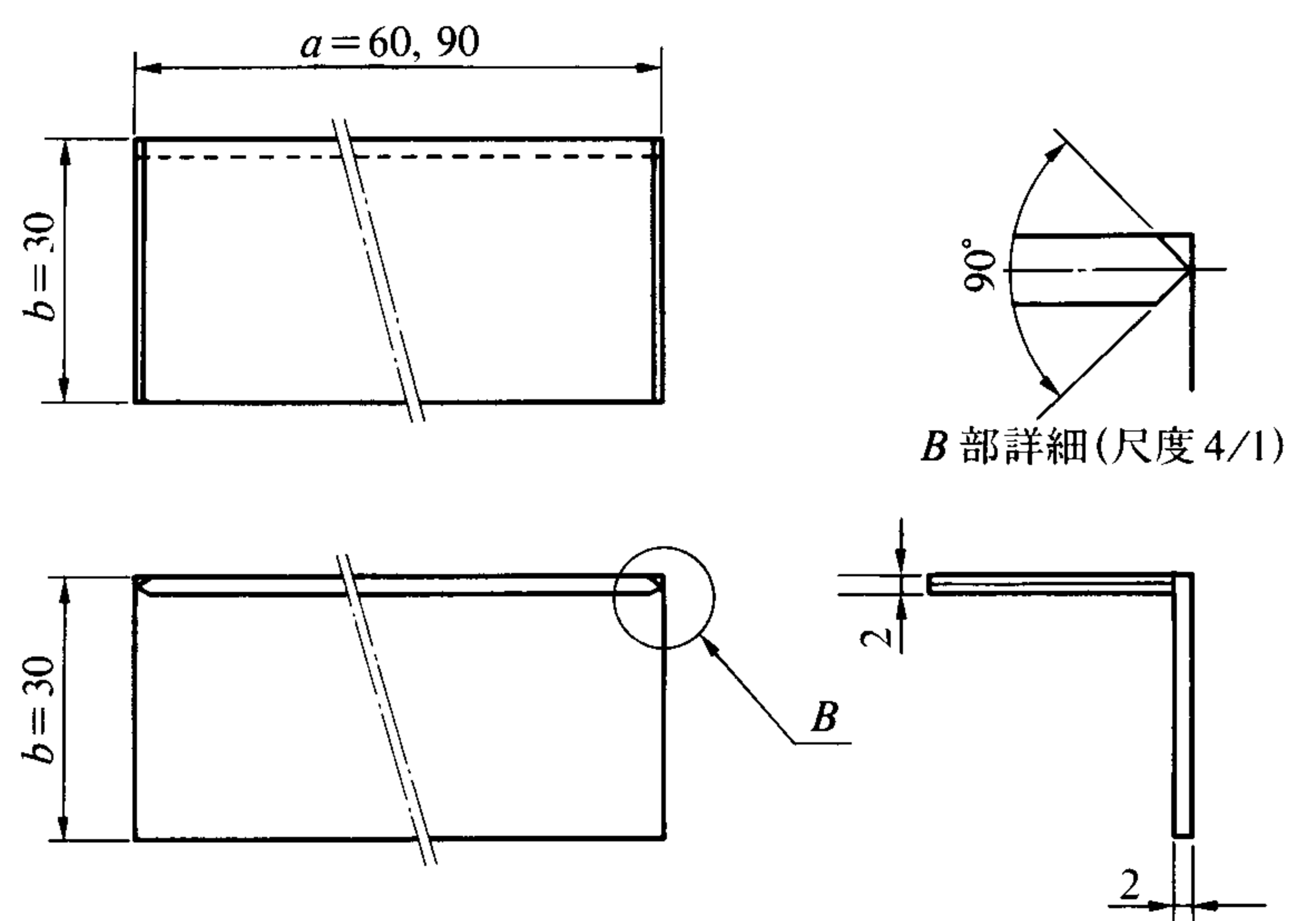


図15 Al 等辺 L 形断面形材試験片の形状・寸法

表2 アルミニウム T 形断面形材の a/b 比に対応する因数 K 、座屈荷重 N_{cr} 及び座屈応力 σ_{cr} の値。
ただし $E=70.6\text{GPa}$, $\nu=0.34$, $h/b=0.04$.

a/b	1.0	1.3	1.5	1.8	2.0	2.3
$K(\gamma \cdot b=2.57)$	1.565	1.204	1.098	1.048	1.076	1.283
N_{cr} KN/m	329	253	231	220	226	270
σ_{cr} MPa	164.4	126.5	115.4	110.1	113.0	134.8

し、長さを変えた数種類で、寸法の選定に当っては、理論上の計算に照して半波の数 $m=1$ における最小値の座屈応力を見つけることを期待した。図16及び17に示すように上下端面が回転自由になるようにチャックの受け部を工夫し、また、L形の片方の板だけに荷重が加わるようにした。ひずみゲージは最大たわみ予想位置の圧縮側に貼付したが、試験結果の観察に基いて引っ張り側に貼ることも試みた。

b. 試験結果

半波の数 $m=2$ の場合を図18に、また $m=3$ の場合を図19に示す。縦軸は荷重 W 及びひずみ ϵ_x を、横軸はク

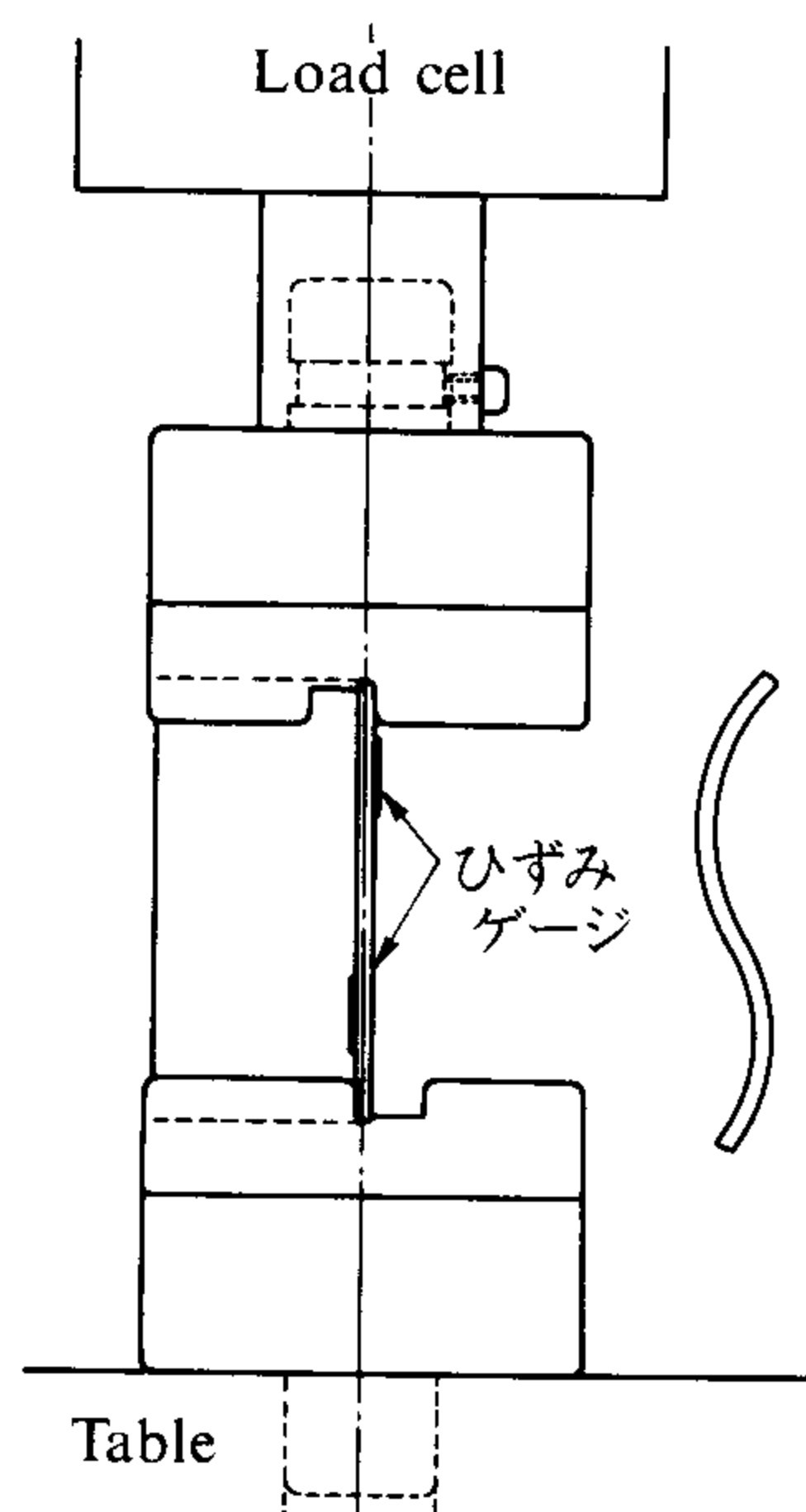


図16 Al 等辺 L 形断面型材試験片 ($m=2$) の取り付け状態

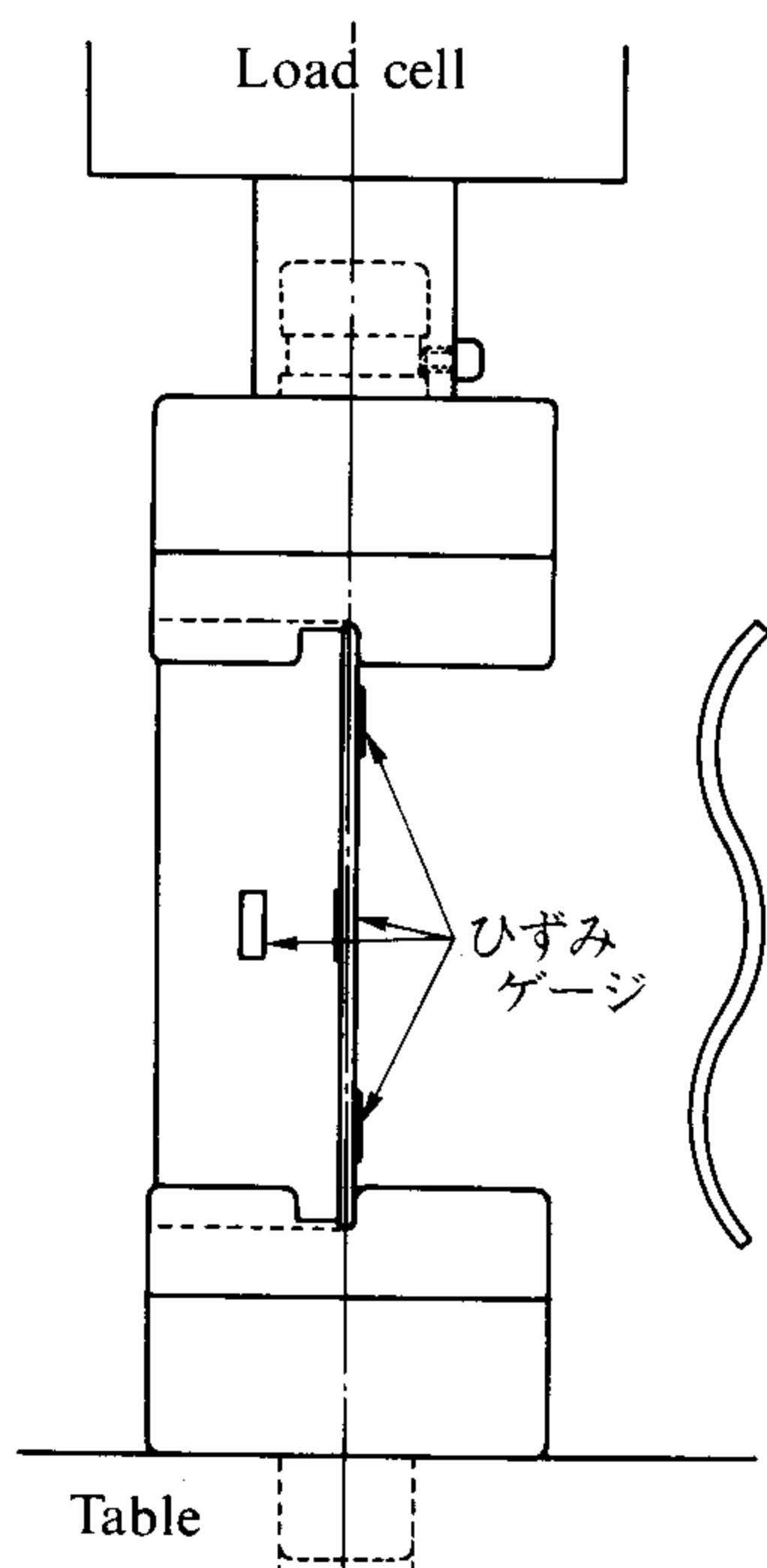


図17 Al 等辺 L 形断面型材試験片 ($m=3$) の取り付け状態

ロスヘッドの定速下降距離を示す。荷重線図を見ると座屈は両試験片とも概ねストローク $0.76 \sim 0.80$ mm の付近で起っている。この時点までは各半波のひずみ量はそろ

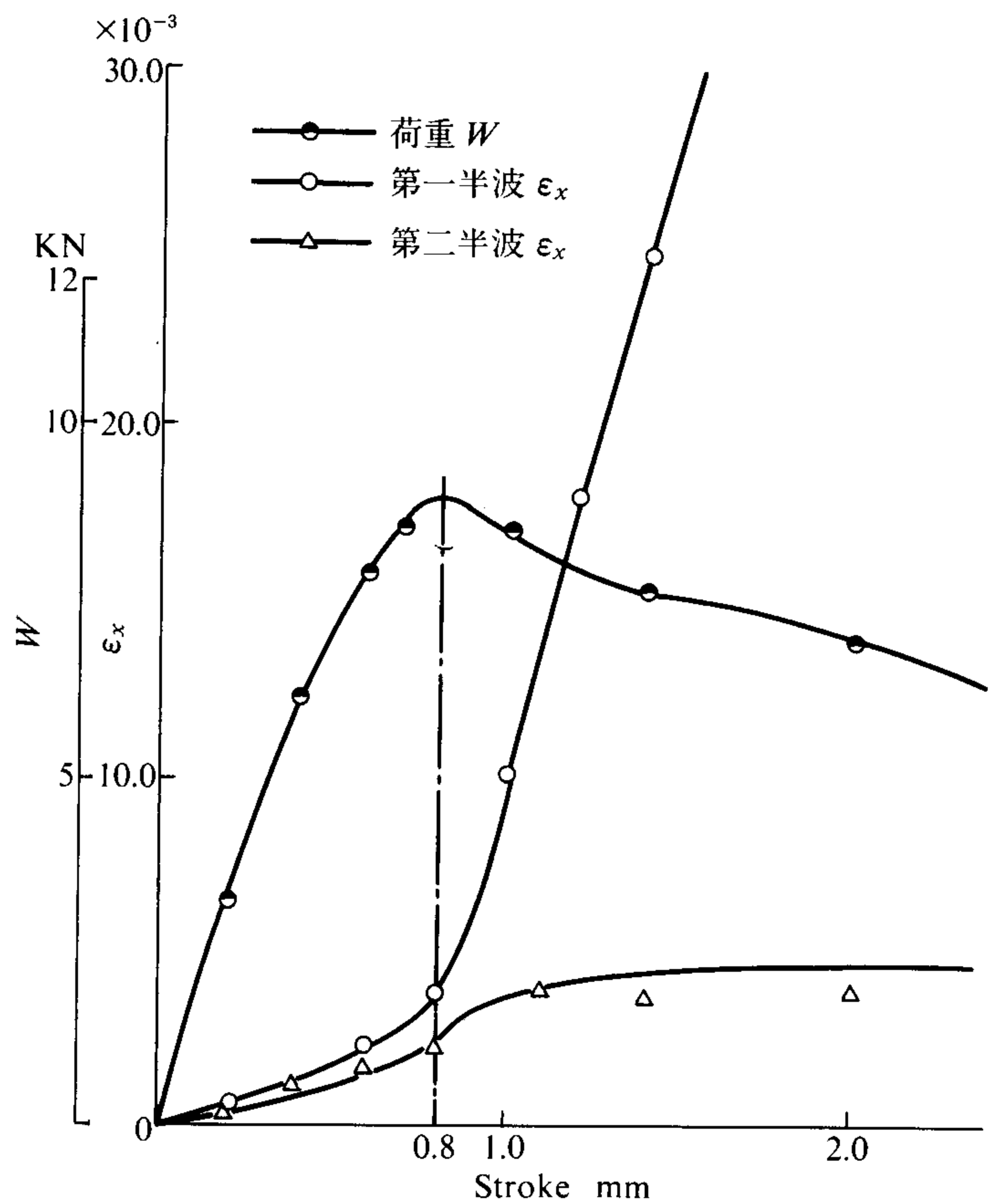


図18 Al 等辺 L 形断面型材 ($m=2$) の座屈試験

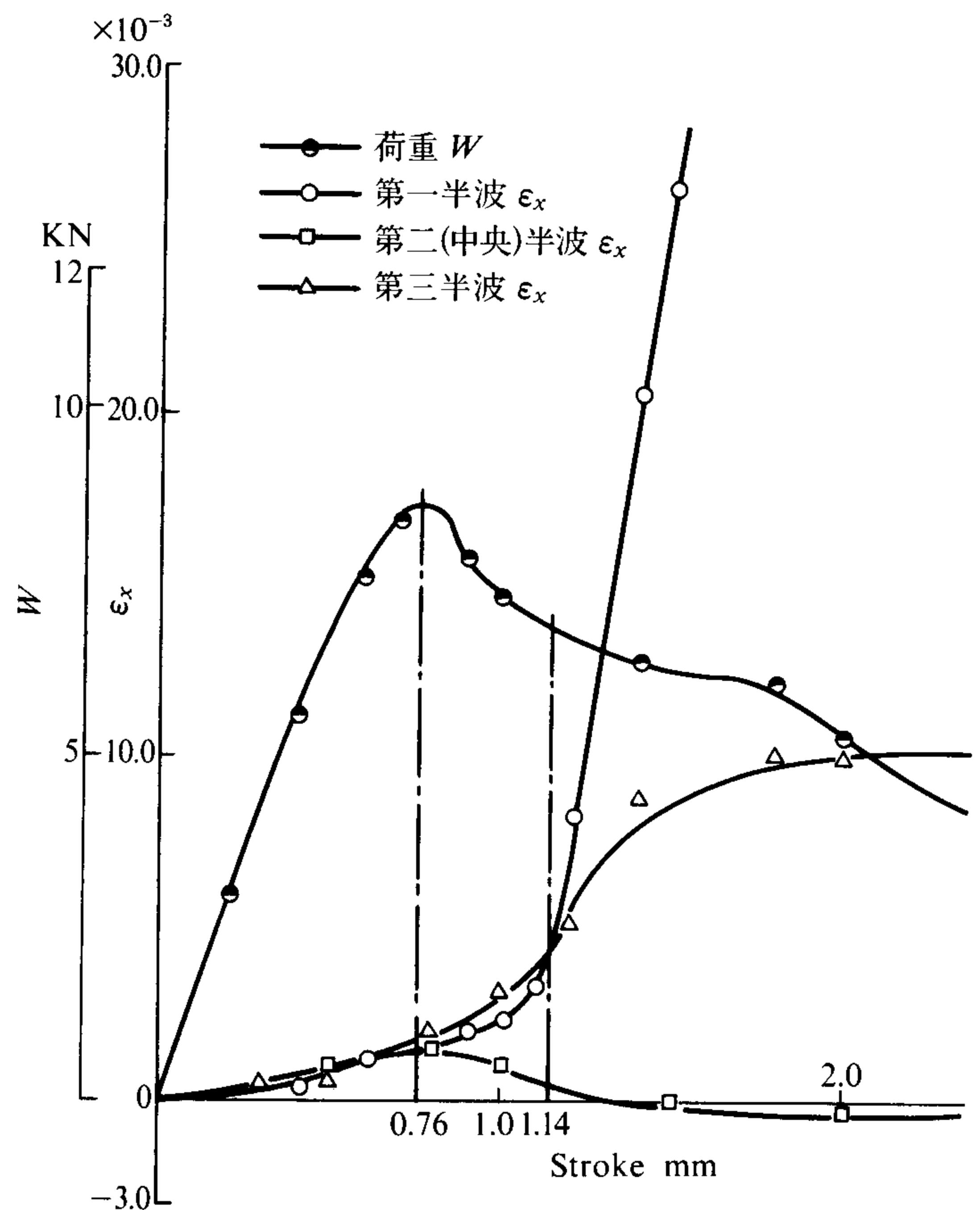


図19 Al 等辺 L 形断面型材 ($m=3$) の座屈試験

っていて、サインカーブの半波も略々典型的に生じていると思われるが、この点で $M=2$ の試験片は2つの半波に大きな差異を生じ、一つの半波はひずみが直線的に立ち上り、大きく湾曲するのに対し、もう一つの半波は湾曲が止って安定してしまい、この安定状態は、ほぼ第一半波が密着に至るまで持続する。

$m=3$ の試験片は3つの半波が差異なく、ほとんど同時に座屈を起すが中央の第二半波だけはそこで反転して引っ張り側に転じる。他の第一及び第三半波はその後ストローク1.1 mm 付近までそろって緩やかにひずみを増すが、1.1 mm 付近から第一半波の急激な湾曲が始まるのに伴い、第三半波はストローク1.5 mm あたりから安定状態に入る。このような第二及び第三半波の挙動によって、ストローク2.0 mm 付近で一時板の抵抗力が復活する傾向が見られる。

座屈試験の結果、計測によって求めた座屈応力及び因数 K を表3にまとめた。図20はこの結果から作成した $K \sim a/b$ 関係図である。理論計算から求めた図9とは h/b の値が異なるので一概に比較はできないが同じ傾向を示していると言える。

(2) T 形断面型材の試験

a. 試験準備

Al T 型材を市場で見付けることができなかったのでアルミニウム 2 mm 板を購入して試験片を製作したが、溶接困難のため幅 b を 50 mm 以上にとる必要があった。

表3 アルミニウム等辺 L 形断面型材の座屈試験結果座屈応力 σ_{cr} 及び因数 K の値
($E=70.6\text{GPa}$, $\nu=0.34$, $h/b=0.067$)

a/b	1.0	2.0	3.0	4.0
K	1.343	0.650	0.500	0.467
σ_{cr} MPa	392	190	146	136

a/b の比の値を選ぶに当たっては、L 形の場合と同様、試験後の分析検討を単純にすること、及び半波の数 $m=1$ における最小値の座屈荷重を得ることを期待して数種類を決定した。図21は $a/b=2$ の試験片について、形状・寸法及びひずみゲージ貼付位置を示している。試験片取付治具の構造及び取り付けの方法などはL 形の場合と同様、荷重の働く試験片の x 面の単純支持条件を満たすため種々工夫し、また、フランジ部は荷重からフリーになるように取り付け、他物に接触しないように考慮した。

b. 試験結果

半波の数 $m=1$ の場合を図22に、また $m=2$ の場合を図23及び図24に示す。座標軸は前節 L 形の場合と同じである。座屈は荷重線図から判断すると $m=1$ の場合は概ねストローク0.5 mm 付近で起り、 $m=2$ の場合はやや遅れて0.75 mm～0.8 mm あたりで起っている。 $a=50$ mm より $a=100$ mm の方が座屈が遅れ、また座屈荷重が幾分高くなる傾向が見られたが理由は分らない。引張

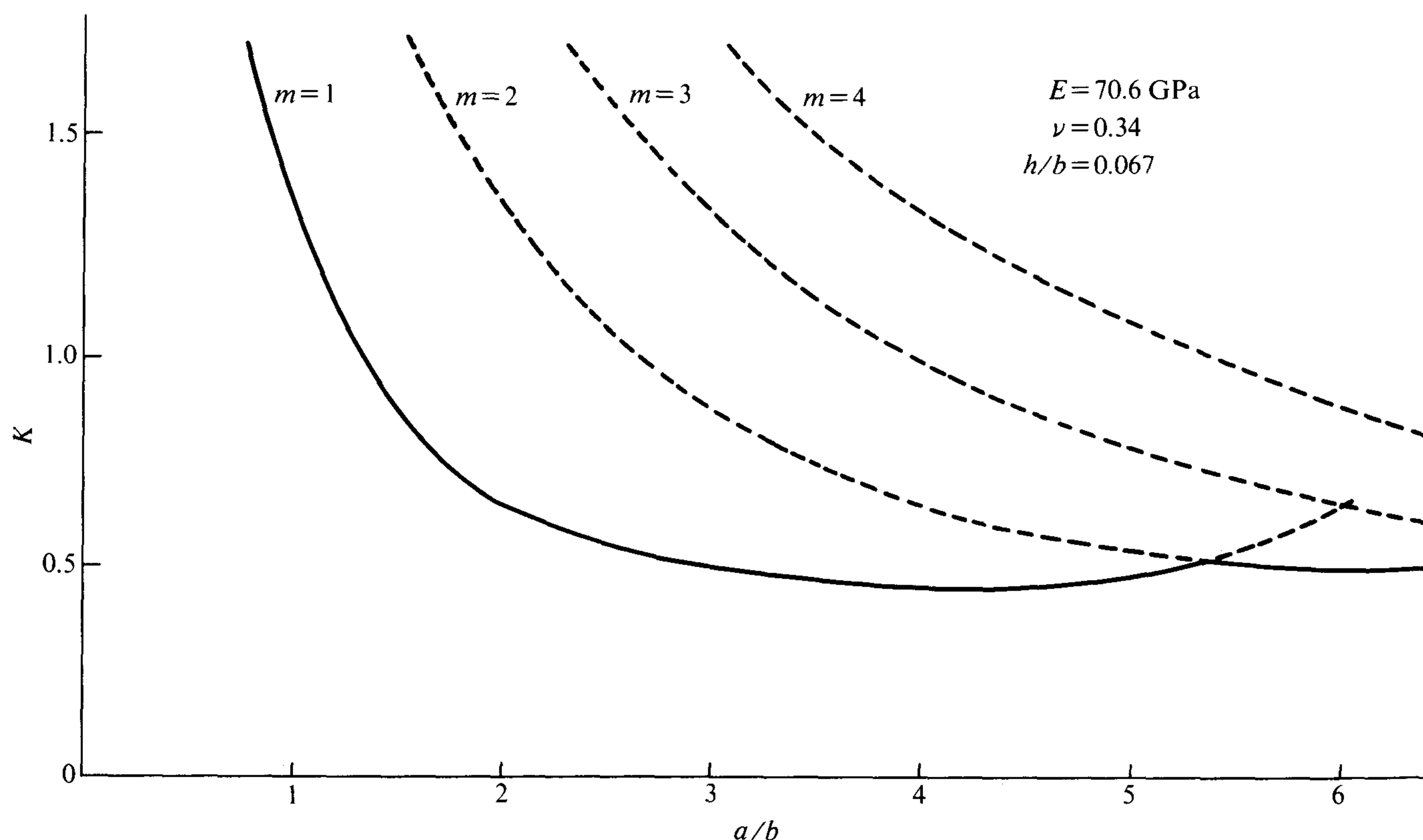


図20 Al 等辺 L 形断面型材 $K \sim a/b$ 関係図 (座屈試験結果)

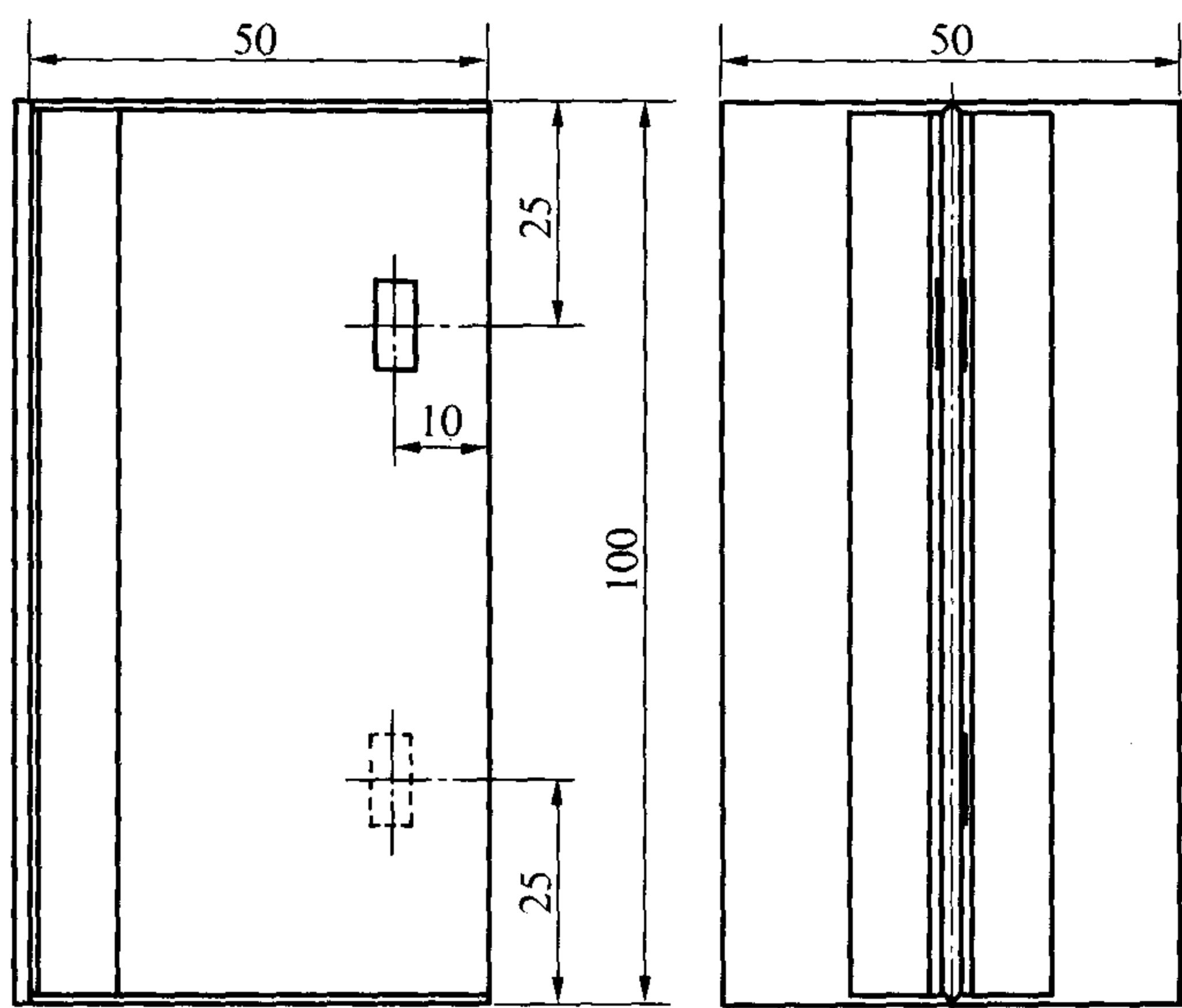


図21 Al T 形断面型材 ($m=2$) 試験片

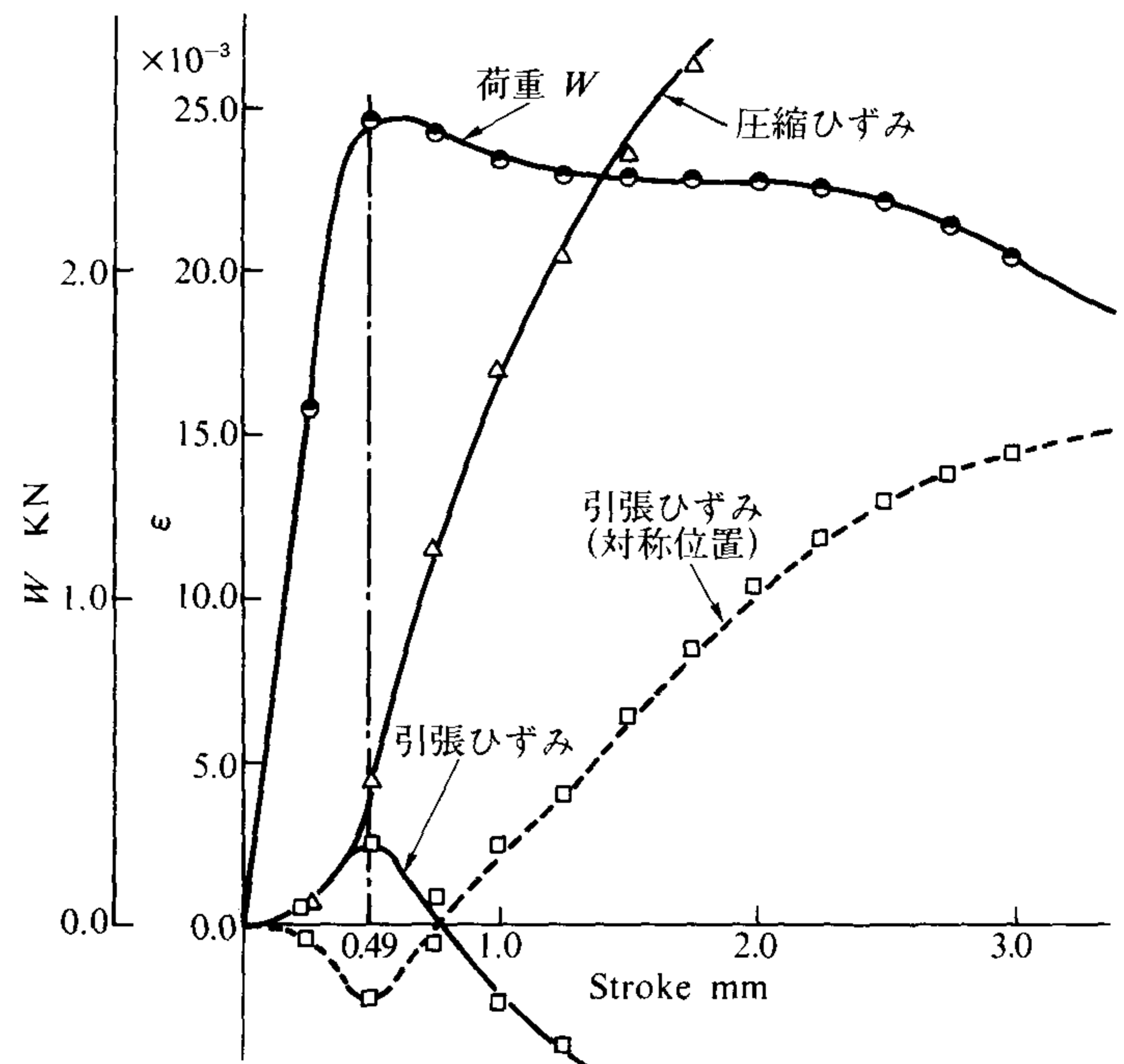


図22 Al T 形断面型材 ($m=1$) の座屈試験

側のひずみは紙面からはみ出るものは便宜上横軸の対称位置に破線で記入した。

$m=2$ の試験片の場合座屈後の第一半波と第二半波のひずみ挙動の相関関係は L 形の場合に述べたところと同様である。しかし T 形の場合、板全体の抵抗力は座屈後もほとんど落ちないでストローク 2 mm を越すまで持続する。この抵抗力の持続性は L 形より大きい。これはフランジによる大きな曲げねじり剛性に起因するものと思われる。

T 形試験片にはひずみゲージを板の圧縮側と引張側の

表裏対称位置に貼付したが、第一半波（大湾曲）の引張ひずみは初期の圧縮ひずみから座屈後大反転して引張ひずみの領域に入る（図23）のに対し、第二半波（小湾曲）の引張側のひずみは図24に見るように座屈後の反転が小さく、圧縮ひずみのままゼロに近づくに過ぎない。

座屈試験の計測によって求めた a/b 比に対応する N_m , σ_a 及び K の値を表 4 に掲げる。これらの値は同じ試験片寸法を用いて計算した表 2 の理論値とよく一致しており、表 4 によって描いた線図は表 2 による図14とほとん

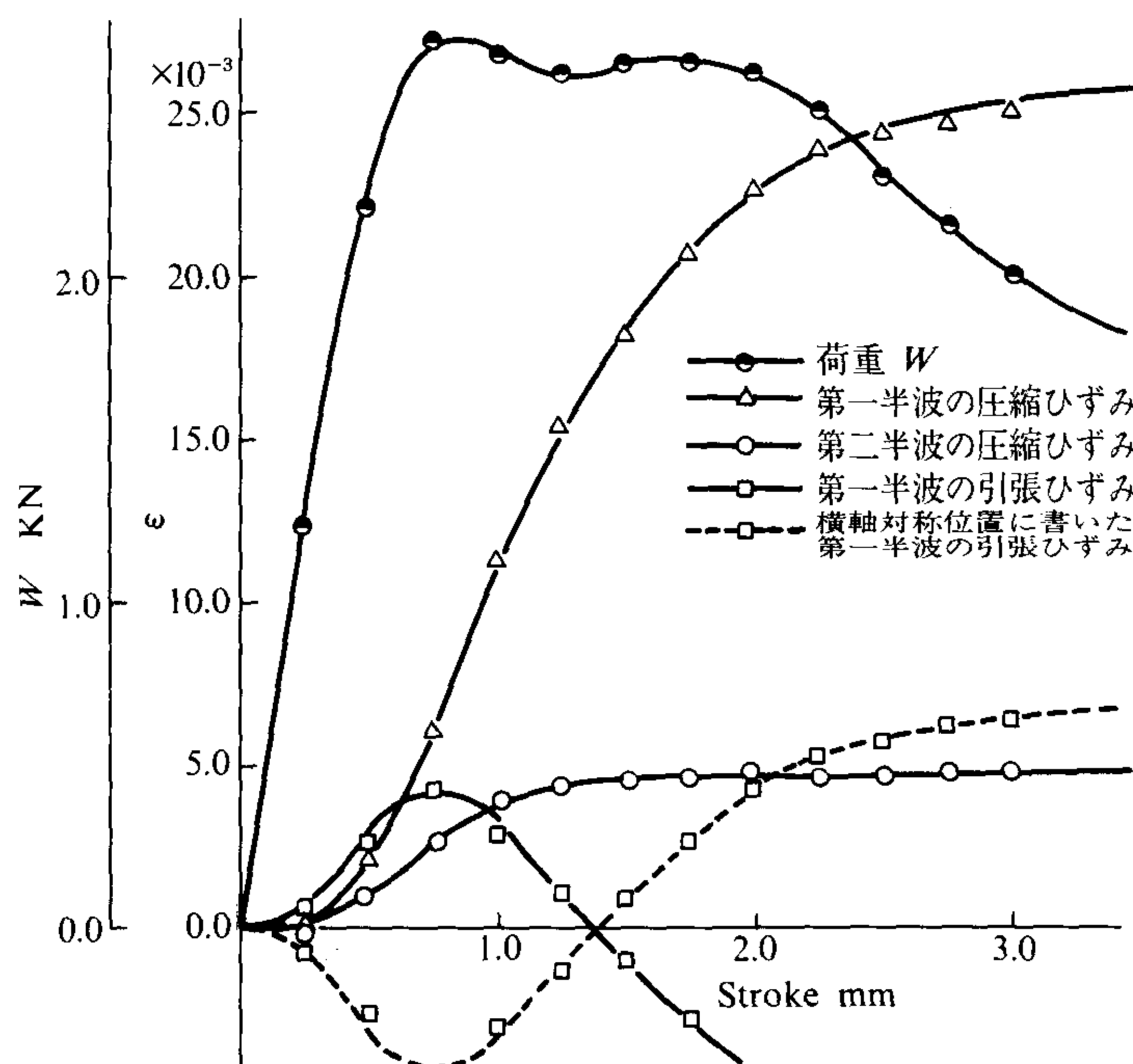


図23 Al T 形断面型材 ($m=2$) の座屈試験 (その 1)

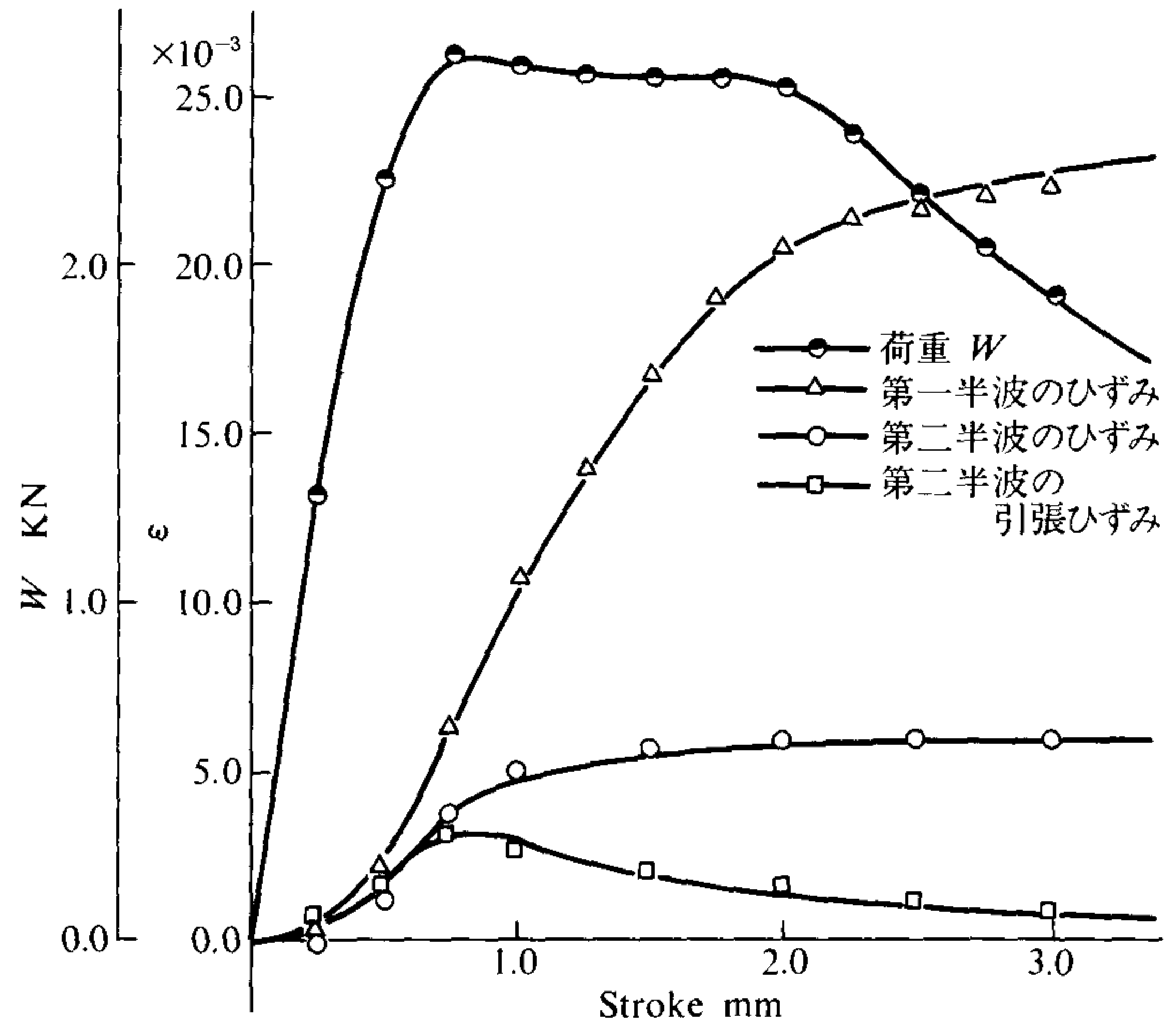


図24 Al T 形断面型材 ($m=2$) の座屈試験 (その 2)

表 4 アルミニウム T 形断面型材の座屈試験結果
座屈荷重 N_{cr} , 座屈応力 σ_{cr} , 因数 K の値
($E=70.6\text{GPa}$, $\nu=0.34$, $h/b=0.04$)

a/b	1.0	1.5	2.0
K	1.566	1.099	1.076
N_{cr} KN/m	328.9	230.8	225.9
σ_{cr} MPa	164.5	115.4	113.0

ど重なり区別できないので図14を共通の結果とする。

8. お わ り に

- (1) この研究はいろいろな数多い型材について現在も続いているが、取り敢えず今までにまとまった L 形と T 形については第一報の積りで報告した。研究の内容については不満な点が多々あるが、特に超越方程式の解き方についてはもっと考える必要がある。
- (2) 実験は十分に尽したとはいえないが、結果的に見れば理論のあとを比較的によく追随し得たと思う。実験が必要が否かはまた別の議論であるが、本研究が卒業論

文の一環として実施される限り、実験が付いて廻るのはやむを得ない。しかしできれば理論の裏打ちとして、もっと徹底的に精査する試験をやりたいと思う。

(3) 本研究の試験片の化学分析に際し、竹下教授のまた、超越方程式の図式解法とパソコンの使用については岸本助教授の懇切なご指導を頂いた。両先生に対し深甚の謝意を表します。

(原稿受付 昭和 2 年 9 月 28 日)

文 献

- 1) 日本機械学会講演論文集 No. 770-1 (1977年) p. 182
- 2) I. Todhunter and K. Pearson, “History of the Theory of Elasticity”. Vol. 1, p. 250
- 3) S. P. Timoshenko and J. M. Gere “Theory of Elastic Stability”. Chap. 8 and 9, Mc Glaw-Hill Book Co.
- 4) S. P. Timoshenko and J. N. Goodier “Theory of Elasticity”. Chap. 2, Mc Glaw-Hill Book Co.
- 5) L. A. Pipes and L. R. Harvill “Applied Mathematics for Engineers and Physicists”, Mc Glaw-Hill Book Co.
- 6) 守田勝彦「工業応用数学」朝倉書店